

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

- 5p 1. a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{2009}-1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2009}+1 \end{vmatrix}$.
- 5p b) Să se calculeze valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 4x + 2 = 0$.
- 5p c) Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3 + A^2 + A = O_3$, unde $A^2 = A \cdot A$ și $A^3 = A^2 \cdot A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = 2xy - 8x - 8y + 36$.
- 5p a) Să se demonstreze că $x \circ y = 2(x-4)(y-4) + 4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 36$.
- 5p c) Știind că operația „ \circ ” este asociativă, să se calculeze $\sqrt{1} \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \dots \circ \sqrt{2009}$.

$$\textcircled{1} a) \begin{vmatrix} \sqrt{2009}-1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2009}+1 \end{vmatrix} = 2009 - 1 + 1 = 2009$$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases} \quad x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 16 - 4 = 12; \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 + x_2^2 = 12$$

$$c) \left. \begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^3 + A^2 + A = O_3$$

$$\textcircled{2} a) 2(x-4)(y-4) + 4 = 2xy - 8x - 8y + 32 + 4 = 2xy - 8x - 8y + 36 = x \circ y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$b) 2(x-4)(x-4) + 4 = 36 \Rightarrow 2(x-4)^2 = 32 \Rightarrow (x-4)^2 = 16 \Rightarrow x-4 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

$$c) x \circ 4 = 2(x-4)(4-4) + 4 = 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{1} \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \dots \circ \sqrt{16} \circ \dots \circ \sqrt{2009} = 4 \quad \text{pt că } \sqrt{16} = 4, \quad x \circ 4 = 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$