V 039

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2-3\sqrt[3]{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;0)$.

5p **c)** Să se arate că $\frac{x+2}{3}\ge\sqrt[3]{x}$, pentru orice $x>0$.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 (x+1)\cdot f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Folosind faptul că $1\le(x+1)^2\le 4$ pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f, este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28},\frac{\pi}{7}\right]$.

① ⓐ $f'(x)=\left(x+2-3x^{\frac13}\right)'=1-3\cdot\frac13 x^{\frac13-1}=1-x^{-\frac23}=1-\frac{1}{x^{\frac23}}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},\ \forall x>0$

ⓑ $y-y_0=m(x-x_0)$

$y_0=f(1)=1+2-3=0$; $m=f'(1)=1-1=0$

$y-0=0(x-1)$; $y=0$ ec. tg la G_f în $A(1,0)$

ⓒ $f'(x)=0 \Rightarrow 1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=0 \Rightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	///	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0 min	$\nearrow$	

$f(x)\ge 0,\ \forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow x+2-3\sqrt[3]{x}\ge 0,\ \forall x>0$

$\Downarrow$

$\frac{x+2}{3}\ge\sqrt[3]{x},\ \forall x>0$

② ⓐ $\int_0^1 (x+1)\cdot\frac{x^3}{x+1}\,dx=\int_0^1 x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac14$

ⓑ $\text{aria}(\Gamma_f)=\int_0^1\frac{x^3}{x+1}\,dx=\int_0^1\left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\right.$

$\left.-\ln(x+1)\right)\Big|_0^1=\frac13-\frac12+1-\ln 2=\frac56-\ln 2$

ⓒ $1\le(1+x)^2\le 4,\ \forall x\in[0,1] \Rightarrow \frac{x^6}{4}\le\left(\frac{x^3}{1+x}\right)^2\le\frac{x^6}{1},\ \forall x\in[0,1]$

$Vol(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1\left(\frac{x^3}{1+x}\right)^2dx$

$\pi\int_0^1\frac{x^6}{4}\,dx\le\pi\int_0^1\left(\frac{x^3}{1+x}\right)^2dx\le\pi\int_0^1\frac{x^6}{1}\,dx$

$\pi\frac{x^7}{4\cdot 7}\Big|_0^1\le Vol(C_f)\le\pi\frac{x^7}{7}\Big|_0^1 \Rightarrow \frac{\pi}{28}\le Vol(C_f)\le\frac{\pi}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow Vol(C_f)\in\left[\frac{\pi}{28};\frac{\pi}{7}\right]$