V 023

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-2x+1)e^x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

5p c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$ şi $F(x)=(x+1)\ln x-x+1$.

5p a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

5p b) Să se calculeze $\int_1^2 f(e^x)dx$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_1^2 f(x)F(x)dx=\frac{(3\ln 2-1)^2}{2}$.

① a) $f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x+1)e^x=(x^2-1)e^x,\ x\in\mathbb{R}$

b) $f'(x)=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 1$; $f(1)=0$, $f(-1)=\frac{4}{e}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ 0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$ max	$\searrow$ 0 min	$\nearrow$

$\left.\begin{matrix} A(-1;\frac{4}{e}) \\ B(1;0)\end{matrix}\right\}$ puncte de extrem

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\frac{(x^2-1)e^x}{(x^2-2x+1)e^x}-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}-1\right]=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(x+1-x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1}=2$

② a) $F'(x)=(x+1)'\ln x+(x+1)(\ln x)'-1=\ln x+\frac{x+1}{x}-\frac{x}{1}=\ln x+\frac{x+1-x}{x}=$

$=\ln x+\frac{1}{x},\ x\in[1,+\infty) \Rightarrow F'(x)=f(x),\ \forall x\in[1,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ - primitivă a lui f

b) $\int_1^2 f(e^x)dx=F(e^x)\Big|_1^2=\left[(e^x+1)\ln e^x-e^x+1\right]\Big|_1^2=\left[x(e^x+1)-e^x+1\right]\Big|_1^2=$

$=\left[2(e^2+1)-e^2+1\right]-\left[1(e+1)-e+1\right]=2e^2+2-e^2+1-e-1+e-1=$

$=e^2+1$

c) $\int_1^2 f(x)F(x)dx=\int_1^2 F'(x)F(x)dx=\frac{F^2(x)}{2}\Big|_1^2=\frac{F^2(2)-F^2(1)}{2}=$

$=\frac{(3\ln 2-1)^2}{2}$