V033

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{2e^x}{x+e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $-1\le f(x)\le\dfrac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x\ge 0$.

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră, $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x+1}\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Utilizând, eventual, inegalitatea $\dfrac{x^n}{2}\le\dfrac{x^n}{x+1}\le x^n$, adevărată pentru orice $x\in[0,1]$ și $n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $\dfrac{1}{2}\le 2010\cdot I_{2009}\le 1$.

① a) $f'(x)=\dfrac{-2e^x(x+e^x)+2e^x(1+e^x)}{(x+e^x)^2}=\dfrac{2e^x(-x-e^x+1+e^x)}{(x+e^x)^2}=\dfrac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$, $x\in[0,+\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2e^x}{x+e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+e^x-2e^x}{x+e^x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-e^x}{x+e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-e^x}{e^x}=-1\Rightarrow$

$\Rightarrow y=-1$ asimptota orizontală către $+\infty$

c) $f'(x)=0\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1$.

$f(0)=1-2=-1$; $f(1)=1-\dfrac{2e}{1+e}=\dfrac{1+e-2e}{1+e}=\dfrac{1-e}{1+e}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1-e}{1+e}$ max	$\searrow$	-1

deci $-1\le f(x)\le\dfrac{1-e}{1+e}$, $\forall x\ge 0$

② a) $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[x-\ln(x+1)\right]\Big|_0^1=1-\ln 2$

b) $I_{n+1}+I_n=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{x^{n+1}}{x+1}+\frac{x^n}{x+1}\right)dx=\int_0^1\frac{x^n(x+1)}{x+1}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

c) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{2}dx\le\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx\le\int_0^1 x^n dx\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{x^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_0^1\le I_n\le\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1\Rightarrow\dfrac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

pt $n=2009$; $\dfrac{1}{2\cdot 2010}\le I_{2009}\le\dfrac{1}{2010}\ \Big|\cdot 2010\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}\le 2010\, I_{2009}\le 1$