Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z\cdot\overline{z}-z-\overline{z}=(4-i)(4+i)-(4-i)-(4+i)=$	**2p**
	$=4^2-i^2-8=9$	**3p**
2.	$\Delta=(2m+1)^2-4\left(m^2-m+2\right)=8m-7$	**2p**
	Axa Ox este tangentă graficului funcției $f \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 8m-7=0 \Leftrightarrow m=\frac{7}{8}$	**3p**
3.	$3\log_x 5+\log_5(5x)=5 \Rightarrow \frac{3}{\log_5 x}+\log_5 5+\log_5 x=5 \Rightarrow (\log_5 x-1)(\log_5 x-3)=0$	**3p**
	$x=5$ sau $x=125$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci numărul cazurilor posibile este egal cu 900	**2p**
	Numerele naturale de trei cifre, care sunt multipli de 11, sunt $10\cdot 11, 11\cdot 11, \ldots, 90\cdot 11$, deci numărul cazurilor favorabile este egal cu 81	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{81}{900}=\frac{9}{100}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$\sin^2 x+6\sin x\cos y+9\cos^2 y+\cos^2 x-6\cos x\sin y+9\sin^2 y=10 \Leftrightarrow 6\sin(x-y)=0$	**3p**
	$x, y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x-y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, deci obținem $x-y=0$, adică $x=y$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\Delta(0,2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 6 & 2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6+6+0-0-2-12=-2$	**3p**
b)	$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x-1 & y-1 & 2\\ x^2+x-2 & y^2+y-2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x-1 & y-1 & 2\\ (x-1)(x+2) & (y-1)(y+2) & 2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(x-1)(y-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ x+2 & y+2\end{vmatrix}=(x-1)(y-1)(y-x)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$\Delta(m,n)=\begin{vmatrix}1&1&1\\m+1&n+1&2\\m^2+m&n^2+n&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\m+1&n+1&2\\m(m+1)&n(n+1)&2\end{vmatrix}$	**1p**
	Cum numerele m și n sunt întregi, numerele $m(m+1)$ și $n(n+1)$ sunt divizibile cu 2, deci există numerele întregi k și l astfel încât $m(m+1)=2k$ și $n(n+1)=2l$	**2p**
	$\Delta(m,n)=\begin{vmatrix}1&1&1\\m+1&n+1&2\\2k&2l&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&1&1\\m+1&n+1&2\\k&l&1\end{vmatrix}$, deci numărul $\Delta(m,n)$ este divizibil cu 2	**2p**
2.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$, $A(2)=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(0)+A(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}a&0&a-1\\0&1&0\\a-1&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&0&b-1\\0&1&0\\b-1&0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2ab-a-b+1&0&2ab-a-b\\0&1&0\\2ab-a-b&0&2ab-a-b+1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2ab-a-b+1&0&(2ab-a-b+1)-1\\0&1&0\\(2ab-a-b+1)-1&0&2ab-a-b+1\end{pmatrix}=A(2ab-a-b+1)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A\left(\frac{1}{2}\right)A(a)=A\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot a-\frac{1}{2}-a+1\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru a număr real	**2p**
	$A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=\left(A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=$ $=\left(A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right)=\ldots=A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{2017}{2}\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+1-x^3}{x^3(x+1)^3}=\frac{(x+1)^3-x^3}{x^3(x+1)^3}=$	**3p**
	$=\frac{(x+1)^3}{x^3(x+1)^3}-\frac{x^3}{x^3(x+1)^3}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}\right)=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**

c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)=1$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)^{2n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{(n+1)^3}\right)^{\frac{(n+1)^3}{-1}}\right)^{\frac{-2n^3}{(n+1)^3}}=$	**2p**
	$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2n^3}{(n+1)^3}}=\frac{1}{e^2}$	**2p**
2.a)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x^2-x+a}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^3}\right)}{x^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^3}\right)=1$	**2p**
b)	f este continuă în $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=f(0)$	**1p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(x^3+3x^2-x+a\right)=a$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\left(e^x+1\right)\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}+e^x+1}=\frac{4}{3}$, $f(0)=a$	**3p**
	$a=\frac{4}{3}$	**1p**
c)	Pentru $a\in(-6,-3)$, avem $f(-3)=3+a<0$, $f(-1)=3+a<0$ și $f(-2)=6+a>0$	**3p**
	Funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$, deci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție reală în intervalul $(-3,-2)$ și cel puțin o soluție reală în intervalul $(-2,-1)$	**2p**