

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I  
Clasa a XII-a *Matematică-informatică*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea *Matematică-informatică*.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Model 1

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Să se rezolve în  $\mathbb{Z}_6$  ecuația  $\hat{2}x + \hat{3} = \hat{1}$ .
- 5p 2. Pe mulțimea  $M = \mathbb{R}$  se consideră legea de compoziție  $*: M \times M \rightarrow M$ ,  
 $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ ,  $\forall x, y \in M$ . Determinați elementul neutru al legii.
- 5p 3. Se consideră mulțimea  $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\}$ . Să se arate că  $3 + 2\sqrt{2} \in G$ .
- 5p 4. Calculați  $\int x e^{x^2} dx$ .
- 5p 5. Calculați  $\int_0^1 \frac{1}{8 - 2x^2} dx$ .
- 5p 6. Determinați funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care o primitivă a sa este de forma:  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \arctg(3x)$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră legea de compoziție  $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x * y = xy - 5x - 5y + 30$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- 5p a) Arătați că  $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- 5p b) Arătați că legea este asociativă.
- 5p c) Calculați  $(-2015) * (-2014) * \dots * (2014) * (2015)$
2. Se consideră mulțimea  $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in (0, \infty) \right\}$
- 5p a) Arătați că:  $I_3 \in G$  și  $O_3 \notin G$ .
- 5p b) Arătați că  $A(a) \cdot A(b) = A(ab)$ ,  $\forall A(a), A(b) \in G$ .
- 5p c) Determinați  $(A(a))^{-1}$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 2 & , x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 3 & , x < 1 \end{cases}$ .
- 5p a) Arătați că funcția  $f$  admite primitive.
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $(-\infty, 1)$ .
- 5p c) Determinați primitiva funcției  $f$  al cărei grafic trece prin punctul  $A(0, 3)$ .
2. Pentru fiecare număr natural  $n$  se consideră  $f_n: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n \cdot \sin x$  și  $I_n = \int f_n(x) dx$
- 5p a) Calculați  $I_1$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int \frac{(\ln^2 x) \cdot (\sin x)}{f_1(x)} dx$ .
- 5p c) Să se arate că  $I_n = -x^{n-1}(x \cos x - n \cdot \sin x) - n \cdot (n-1) I_{n-2}$ ,  $\forall n \geq 2$ .

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I  
Clasa a XII-a *Matematică-Informatică*

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Model 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I

1.	$\hat{2}x = \hat{4}$	1p
	$\frac{x}{\hat{2}x} \mid \hat{0} \hat{1} \hat{2} \hat{3} \hat{4} \hat{5}$	2p
	$x \in \{\hat{2}, \hat{5}\}$	2p
2.	$\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$	1p
	$x * e = \sqrt{x^3 + e^3} = \sqrt{e^3 + x^3} = e * x, \forall x \in \mathbb{R}$	1p
	$x * e = x \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + e^3} = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^3 + e^3 = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$	2p
	$e = 0 \in \mathbb{R}$	1p
3.	$a + b\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 3 \in \mathbb{Z}, b = 2 \in \mathbb{Z}(1)$	2p
	$a^2 - 2b^2 = 9 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 8 = 1(2)$	2p
	Din (1) și (2) $\Rightarrow 3 + 2\sqrt{2} \in G$	1p
4.	$x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$	2p
	$I_t = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C$	2p
	$I_x = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$	1p
5.	$\int_0^1 \frac{1}{8-2x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx =$	1p
	$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \ln \left  \frac{x-2}{x+2} \right _0^1 =$	2p
	$= -\frac{1}{8} \left( \ln \frac{1}{3} - \ln 1 \right) = -\frac{1}{8} \ln \frac{1}{3} = \frac{\ln 3}{8}$	2p
6.	$F$ primitivă lui $f \Leftrightarrow F$ derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$	1p
	$\Rightarrow f(x) = \left( \frac{2^x}{\ln 2} \right)' + [\arctg(3x)]' = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x \ln 2 + \frac{1}{1+9x^2} \cdot 3 =$	3p
	$= 2^x + \frac{3}{9x^2+1}$	1p

SUBIECTUL al II-lea

1.	a)	$(x-5)(y-5) + 5 = xy - 5x - 5y + 25 + 5 =$	3p
		$= xy - 5x - 5y + 30 = x * y, \forall x, y \in \mathbb{R}$	2p

	b)	$(x * y) * z = (x - 5)(y - 5)(z - 5) + 5, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $x * (y * z) = (x - 5)(y - 5)(z - 5) + 5, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z) \forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow "*" \text{ asociativa}$	2p 2p 1p
	c)	$(-2015) * (-2014) * \dots * (2014) * (2015)$ $\stackrel{asoc}{=} \underbrace{[(-2015) * (-2014) * \dots * 4]}_x * 5 * \underbrace{[6 * \dots * 2015]}_y =$ $= x * 5 * y \stackrel{asoc}{=} (x * 5) * y = [(x - 5)(5 - 5) + 5] * y = 5 * y = (5 - 5)(y - 5) + 5 = 5$	2p 3p
2.	a)	<p>Pt. <math>a = 1 \in (0, \infty) \Rightarrow A(1) = I_3 \Rightarrow I_3 \in G</math></p> <p>Pp. <math>O_3 \in G \Rightarrow \exists a \in (0, \infty)</math> a.î <math>A(a) = O_3 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 \\ a = 1 \text{ imposibil, deci } O_3 \notin G \\ a = 0 \end{cases}</math></p>	2p 3p
	b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln b \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln a + \ln b \\ 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln(ab) \\ 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(ab)$ <p><math>a &gt; 0, b &gt; 0 \Rightarrow ab &gt; 0</math></p>	2p 3p
	c)	<p><math>(A(a))^{-1} \stackrel{not}{=} A(b) \Rightarrow A(a)A(b) = A(b)A(a) = A(1) = I_3</math></p> <p>Cf. b) <math>A(a)A(b) = A(ab) = A(ba) = A(b)A(a)</math></p> <p><math>(1) A(a) = A(b) \Rightarrow a = b</math></p> <p><math>\Rightarrow A(ab) = A(1) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a}, a &gt; 0 \Rightarrow b &gt; 0</math></p> <p><math>\Rightarrow (A(a))^{-1} = A\left(\frac{1}{a}\right) \in G</math></p>	1p 1p 2p 1p

**SUBIECTUL al III-lea**

1.	a)	<p><math>f</math> continuă pe <math>(-\infty, 1)</math> și pe <math>(1, \infty)</math> -operații cu funcții continue.(1)</p> <p><math>\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x &lt; 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x &lt; 1}} (x^2 - 2x + 3) = 1 - 2 + 3 = 2</math></p> <p><math>\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x &gt; 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x &gt; 1}} \left( \frac{\ln x}{x} + 2 \right) = \frac{0}{1} + 2 = 2</math></p> <p><math>f(1) = 2 \Rightarrow l_s(1) = l_d(1) = f(1) \Rightarrow f</math> continuă în <math>x = 1</math> (2)</p> <p>Din (1) și (2) <math>\Rightarrow f</math> continuă pe <math>\mathbb{R} \Rightarrow f</math> admite primitive.</p>	1p 1p 1p 1p
	b)	<p>Fie <math>F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math> o primitivă a lui <math>f \Rightarrow F</math> derivabilă și <math>F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}</math></p> <p>Pt <math>x \in (-\infty, 1), F'(x) = f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 &gt; 0, \forall x \in (-\infty, 1)</math></p> <p><math>\Rightarrow F</math> strict crescătoare pe <math>(-\infty, 1)</math>.</p>	1p 3p 1p
	c)	<p><math>\int \left( \frac{\ln x}{x} + 2 \right) dx = \frac{\ln^2 x}{2} + 2x + c_1</math></p> <p><math>\int (x^2 - 2x + 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + c_2</math></p>	2p 1p

	<p>Fie <math>F</math> o primitivă a lui <math>f</math>. <math>F(x) = \begin{cases} \frac{\ln^2 x}{2} + 2x + c_1, &amp; x \geq 1 \\ \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + c_2, &amp; x &lt; 1 \end{cases}</math></p> <p><math>F</math> derivabilă, deci continuă. <math>F</math> continuă pe <math>\mathbb{R} \setminus \{1\}</math>, op cu fc elementare, <math>F</math> continuă în <math>x=1 \Leftrightarrow l_s(1) = l_d(1) = F(1) \Rightarrow \frac{7}{3} + c_2 = 2 + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3} + c_2</math></p> <p><math>F(0) = 3 \Rightarrow c_2 = 3 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{\ln^2 x}{2} + 2x + \frac{10}{3}, &amp; x \geq 1 \\ \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + 3, &amp; x &lt; 1 \end{cases}</math> primitiva al cărei grafic trece prin <math>A(0,3)</math>.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>
2.	<p>a) <math>I_1 = \int f_1(x) dx = \int (x \cdot \sin x) dx</math></p> <p><math>= \int x \cdot (-\cos x)' dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx =</math></p> <p><math>= -x \cdot \cos x + \sin x + C</math></p>	<p>1p</p> <p>3p</p> <p>1p</p>
	<p>b) <math>\int \frac{\ln^2 x \cdot \sin x}{x \cdot \sin x} dx = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = I_x</math></p> <p><math>\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \Rightarrow I_t = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C</math></p> <p><math>I_x = \frac{\ln^3 x}{3} + C</math></p>	<p>1p</p> <p>3p</p> <p>1p</p>
	<p>c) <math>I_n = \int (x^n \cdot \sin x) dx = \int x^n \cdot (-\cos x)' dx =</math></p> <p><math>= -x^n \cdot \cos x + n \int (x^{n-1} \cdot \cos x) dx = -x^n \cdot \cos x + n \int x^{n-1} \cdot (\sin x)' dx =</math></p> <p><math>= -x^n \cdot \cos x + n \left( x^{n-1} \cdot \sin x - (n-1) \int x^{n-2} \sin x dx \right) \Rightarrow</math></p> <p><math>I_n = -x^{n-1} (x \cdot \cos x - n \cdot \sin x) - n \cdot (n-1) I_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.</math></p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>