www.profesorjitaruionel.blog

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ILFOV

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I

Clasa a XII-a *Matematică-informatică*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Model 2

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se calculeze $\hat{4}^{2016}$ în Z_5.

5p **2.** Pe mulţimea $M = (0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră legea de compoziţie $x * y = x^{5\ln y}, \forall x, y \in M$
Calculaţi $2 * e + e * 2$.

5p **3.** Pe mulţimea numerelor întregi se consideră legea de compoziție $*: Z \to Z$, $x * y = xy - 5x -$
. $-5y + 30$, cu elementul neutru $e = 6$. Arătați că 1 nu are simetric în raport cu legea dată.

5p **4.** Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{5} & , x \le 0 \\ x \cdot \cos x + \frac{1}{5}, & x > 0 \end{cases}$. Arătați că funcția f admite
. primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **5.** Calculaţi $\int_0^1 \frac{x^2}{2-x^2} dx$.

5p **6.** Calculaţi $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră legea de compoziţie$\circ$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \circ y = 2xy - x - y + 1, \forall x, y \in R$.

5p **a)** Să se arate că $x \circ y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}, \forall x, y \in R$.

5p **b)** Ştiind că legea "$\circ$" este asociativă, calculaţi $\left(-\frac{1}{7}\right) \circ \left(-\frac{1}{6}\right) \circ .... \circ \left(\frac{1}{6}\right) \circ \left(\frac{1}{7}\right)$.

5p **c)** Pe mulţimea numerelor reale, rezolvaţi ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x = 13$.

2. Se consideră mulţimea M= $\left\{ A(x) \in M_3(R) / A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in R \right\}$

5p **a)** Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, x *şi* $y \in R$.

5p **b)** Să se arate că $(A(x))^{-1} \in M$ pentru orice $A(x) \in M$

5p **c)** Demonstraţi că grupurile $(M,\cdot)$şi $(R,+)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

5p **a)** Să se determine o primitivă F a lui f cu proprietatea că $F(e^{e-1})=2$.

5p **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze suma $F(\sqrt{e})+F(\sqrt[3]{e})+F(\sqrt[4]{e})+.....+F(\sqrt[11]{e})$, unde F este determinată la punctul a.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi funcţiile $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_a(x)=\frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ şi $F_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$F_a(x)=\dfrac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$

5p **a)** Să se arate că funcţia F_a este o primitivă a funcţiei f_a, $\forall a\in\mathbb{R}$

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^2 f_2(x)dx$

5p **c)** Să se calculeze $\int f_1(x)F_1^2(x)dx$

BAREM
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Matematică-informatică*

Model 2

- **Pentru orice solutie corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvari partiale, in limitele punctajului indicat in barem.**
- **Se acorda 10 puncte din oficiu. Nota finala se calculeaza prin impartirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1	$\hat{4}^{2k+1} = \hat{4}$ $\hat{4}^{2k} = \hat{1}$ $\hat{4}^{2016} = \hat{1}$	2p 2p 1p
2	$2 * e = 32$ $e * 2 = 32$ $= 64$	2p 2p 1p
3	Dacă x este simetricul lui 1 , atunci $x * 1 = 1 * x = 6$ $x * 1 = 6 \leftrightarrow x = \frac{19}{4}$ nu aparține lui Z	2p 3p
4	$l_s(0) = \frac{1}{5}, l_d(0) = \frac{1}{5}, f(0) = \frac{1}{5}, deci$ f continua in x=0 f continua pe **R** $-\{0\}$ ca functii elementare, deci f continua pe **R** f admite primitive pe **R**	2p 1p 2p
5	$\int_0^1 \frac{x^2}{2-x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^2-2+2}{2-x^2}dx = -\int_0^1 1dx - 2\int_0^1 \frac{1}{x^2-2}dx$ Finalizare:$-1 - \frac{1}{\sqrt{2}} ln\left\|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right\|$	2p 3p
6	$\cos x = t, \quad -sinx \cdot dx = dt, \ 1 - sin^2x = 1 - t^2$ Finalizare:$-\frac{cos^3x}{3} + \frac{cos^5x}{5} + C$	3p 2p

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a	$2xy - x - y + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$ Finalizare	1p 4p
1.b	verificare $\frac{1}{2} \circ x = \frac{1}{2}$ $x \circ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\left(-\frac{1}{7}\right) \circ \left(-\frac{1}{6}\right) \circ .... \circ \left(\frac{1}{6}\right) \circ \left(\frac{1}{7}\right). = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
1.c	Conform a) avem $2^3\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{2} = 13$ $\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\right] = 0$	2p 2p

www.profesorjitaruionel.blog

	$x \in \left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$	1p
2.a	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & y\\ -y & 1 & -\frac{y^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}1 & 0 & x+y\\ -x-y & 1 & -xy-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$	2p 3p
2.b	$I_3 = A(0) \in M$ Conform a) avem $A(0)=A(x-x)=A(x)\cdot A(-x)$ $\left(A(x)\right)^{-1}=A(-x)\in M$	2p 1p 2p
2.c	Considerăm funcția $f: M \to \mathbb{R}, f(A(x))=x$ f – morfism $f(A(x)A(y))=f(A(x))+f(A(y))$ Bijectivitate	1p 2p 2p

c

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.a	$lnx=t,\ \frac{1}{x}dx=dt$ $\int f(x)dx=\int\frac{1}{1+t}dt=ln\|1+t\|=ln\|1+lnx\|+c$ $F(e^{e-1})=2 => ln\|1+lne^{e-1}\|+c=2 => c=1$	1p 2p 2p
1.b	$F'(x)=f(x)$ $f(x)>0, \forall x\in(1;\infty)$ F crescătoare pe $(1;\infty)$	1p 2p 2p
1.c	$F(\sqrt[n]{e})= ln\|1+ln\sqrt[n]{e}\|+1=ln\frac{n+1}{n}+1$ $F(\sqrt{e})+F(\sqrt[3]{e})+F(\sqrt[4]{e})+.....+F(\sqrt[11]{e})=10+ln\frac{3}{2}+\cdots+ln\frac{12}{11}=10+ln6$	2p 3p
2.a	F_a derivabilă $F_a{}'(x)=f_a(x)$ F_a este o primitivă a funcției f_a, $\forall a\in\mathbb{R}$	1p 3p 1p
2.b	Conform a) avem $\int_1^2 f_2(x)dx=F_2(x)\|_1^2$ Finalizare: $\frac{26\sqrt{5}-40\sqrt{2}}{10}$	2p 3p
2.c	$F_1(x)=t$, $f_1(x)dx=$dt $\int f_1(x)F_1^2(x)dx=\int t^2\,dt=\frac{F_1^3(x)}{3}+C$	2p 3p