

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Tehnologic

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse,
toate calificările profesionale; profilul tehnic toate calificările profesionale
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

MODEL 1

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați opusul elementului $\hat{3}$ în grupul $(\mathbb{Z}_7, +)$.
- 5p 2. Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x * y = x + y - 1$.
- 5p 3 Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + y + xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $1 \circ 2$.
- 5p 4. Calculați: $\int \frac{1}{x^2 + 9} dx$.
- 5p 5. Să se calculeze $\int \frac{3x^5 + 4x - 2}{x} dx, x > 0$.
- 5p 6. Arătați că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x \cdot e^x + 2$ este o primitivă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x(x+1)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pe mulțimea $G = (-3, \infty)$, fie legea de compoziție $*$: $G \times G \rightarrow G, x * y = xy + 3x + 3y + 6, \forall x, y \in G$.
- 5p a) Arătați că $x * y = (x+3)(y+3) - 3, \forall x, y \in G$.
- 5p b) Să se rezolve în G ecuația: $x * x = x$.
- 5p c) Determinați simetricul lui 5 în raport cu legea $*$.
2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$
- 5p a) Să se verifice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$
- 5p b) Să se arate că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Să se calculeze $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(10)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 8}, & x > 1 \\ 3x, & x \leq 1 \end{cases}$.
- 5p a) Arătați că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .
- 5p b) Pentru $x > 1$, să se determine: $\int f^2(x) dx$.
- 5p c) Calculați $\int_0^1 e^x \cdot f(x) dx$.
2. Se consideră funcțiile $f, F: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}, F(x) = x^2 + \ln x$.
- 5p a) Să se arate că F este o primitivă a lui f .
- 5p b) Să se calculeze $\int_1^2 x \cdot f(x) dx$.
- 5p c) Demonstrați că funcția F este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Tehnologice

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Model 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I

1.	$\widehat{-3} = \widehat{7-3} = \widehat{4}$	3p
		2p
2.	$e = 1 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x * 1 = 1 * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ $x * 1 = x + 1 - 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ $1 * x = 1 + x - 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$	1p 2p 2p
3.	$1 \circ 2 = 1 + 2 + 1 \cdot 2 = 5$	3p 2p
4.	$F(x) = \int \frac{1}{x^2+9} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$	5p
5.	$\int \frac{3x^5+4x-2}{x} dx = 3 \int \frac{x^5}{x} dx + 4 \int \frac{x}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x} dx =$ $= 3 \frac{x^5}{5} + 4x - 2 \ln x + C = 3 \frac{x^5}{5} + 4x - 2 \ln x + C$	2p 3p
6.	F primitiva lui $f \Leftrightarrow F$ derivabila și $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ $F'(x) = (xe^x + 2)' = e^x + xe^x + 0 = e^x(x+1) =$ $= f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ este o primitivă pentru f .	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea

1.	a)	$(x+3) \cdot (y+3) - 3 = xy + 3x + 3y + 9 - 3 =$ $= xy + 3x + 3y + 6 = x * y, \forall x, y \in G$	3p 2p
	b)	$x * x = (x+3)^2 - 3$ $(x+3)^2 - 3 = x \Leftrightarrow (x+3)^2 = x+3 \Rightarrow x_1 = -3 \notin G, x_2 = -2 \in G \Rightarrow x = -2$ soluția ecuației	2p 3p
		$\exists e \in G$ a.i. $x * e = e * x = x, \forall x \in G \Leftrightarrow (x+3) \cdot (e+3) - 3 = (e+3) \cdot (x+3) - 3 = x, \forall x \in G$ $\Rightarrow e = -2 \in G$	2p
	c)	$5 * 5' = 5' * 5 = -2 \Rightarrow (5+3) \cdot (5'+3) - 3 = (5'+3) \cdot (5+3) - 3 = -2$ $5' = \frac{-23}{8} > -3 \Rightarrow 5' = \frac{-23}{8}$	1p 1p
2.	a)	$I_2 = A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 0 = 0 \text{ și } 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0$	3p

		Pentru $x = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in G$	2p
	b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$	5p
	c)	$A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(10) = A(1+2+\dots+10) =$ $= A\left(\frac{(1+10) \cdot 10}{2}\right) = A(55) = \begin{pmatrix} 2^{55} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	f continuă pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, \infty)$ - operații cu funcții continue.(1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^2 + 8}) = 3$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x = 3$ $f(1) = 3 \Rightarrow l_s(1) = l_d(1) = f(1) = 3 \Rightarrow f$ continuă în $x = 1$ (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive.	1p 1p 1p 1p
	b)	$\int f^2(x) dx = \int (x^2 + 8) dx =$ $\frac{x^3}{3} + 8x + C$	2p 3p
	c)	$\int_0^1 e^x \cdot f(x) dx = 3 \int_0^1 x \cdot e^x dx$ $3 \left(x e^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) = 3 \left(x e^x \Big _0^1 - e^x \Big _0^1 \right) =$ $= 3(e - 0 - e + 1) = 3$	1p 2p 2p
2.	a)	$F'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x} =$ $= f(x), \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow F$ este o primitivă pentru f .	4p 1p
	b)	$\int_1^2 x f(x) dx = \int_1^2 (2x^2 + 1) dx =$ $= 2 \frac{x^3}{3} \Big _1^2 + x \Big _1^2 =$ $= \frac{2}{3}(8-1) + 2-1 = \frac{17}{3}$	1p 2p 2p
	c)	Fie $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui $f \Rightarrow F$ derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in (0, \infty)$ $F'(x) = f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x} > 0, \forall x \in (0, \infty)$ $\Rightarrow F$ strict crescătoare pe $(0, \infty)$.	1p 3p 1p