



TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I  
Clasa a XII-a Științe ale naturii

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Model 1

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezolvați în  $\mathbb{Z}_5$  ecuația  $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{3}$ .
- 5p 2. Arătați că  $e = -6$  este elementul neutru al legii de compoziție  $*$ :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x * y = xy + 7x + 7y + 42$ .
- 5p 3. Studiați asociativitatea legii  $*$ :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x * y = x + y + 1$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p 4. Calculați:  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ .
- 5p 5. Să se arate că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} (2-x)^{2015}, & x < 2 \\ \ln(x-1), & x \geq 2 \end{cases}$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p 6. Arătați că funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = e^{-x} - 2$  este o primitivă a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -e^{-x}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p 1. Pe mulțimea  $G = (3, \infty)$ , fie legea de compoziție  $*$ :  $G \times G \rightarrow G$ ,  $x * y = xy - 3x - 3y + 12$ ,  $\forall x, y \in G$ .
- 5p a) Arătați că  $x * y = (x-3)(y-3) + 3$ ,  $\forall x, y \in G$ .
- 5p b) Să se rezolve în  $G$  ecuația:  $x * x = x * 6$ .
- 5p c) Determinați  $5' \in G$ , simetricul lui 5 în raport cu legea  $*$ .
2. Se consideră mulțimea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1 \right\} \subset M_2(\mathbb{Z})$ .
- 5p a) Să se verifice că  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$  și  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$ .
- 5p b) Să se arate că pentru  $\forall A, B \in G \Rightarrow A \cdot B \in G$ .
- 5p c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din  $G$  aparține mulțimii  $G$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ .
- 5p a) Să se calculeze  $\int x \cdot f(x) dx$ .
- 5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\int g(x) \cdot \ln x dx$ .
2. Se consideră funcțiile  $f_m: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin  $f_m(x) = m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p a) Să se determine primitivele funcției  $f_1$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int e^x f_0(x) dx$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\int 2f_0(x) e^{x^2+2x+3} dx$ .

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I  
Clasa a XII-a Științe ale Naturii

Model 1

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Științe ale Naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I

1.	$\hat{2}x = \hat{2}$	1p
	$\frac{x}{\hat{2}x} \left  \begin{array}{cccc} \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{4} & \hat{1} & \hat{3} \end{array} \right.$	3p
	$x = \hat{1}$	1p
2.	$(-6) \in \mathbb{R}$ element neutru $\Leftrightarrow x * (-6) = (-6) * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$	1p
	$x * (-6) = -6x + 7x - 42 + 42 = x, \forall x \in \mathbb{R}$	2p
	$(-6) * x = -6x - 42 + 7x + 42 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x * (-6) = (-6) * x = x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-6) \in \mathbb{R}$ este e.n	2p
3.	$(x * y) * z = (x + y + 1) + z + 1 = x + y + z + 2, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$	2p
	$x * (y * z) = x + (y + z + 1) + 1 = x + y + z + 2, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$	2p
	$\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z) \forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow "*" \text{ asociativă}$	1p
4.	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dt = \ln \left( x + \sqrt{x^2+1} \right) \Big _0^{\sqrt{3}} =$	3p
	$= \ln(\sqrt{3}+2) - \ln 1 = \ln(\sqrt{3}+2)$	2p
5.	$f$ continuă pe $(-\infty, 2)$ și pe $(2, \infty)$ -operații cu funcții continue.(1)	1p
	$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (2-x)^{2015} = 0$	1p
	$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (\ln(x-1)) = \ln 1 = 0$	1p
	$f(2) = 0 \Rightarrow l_s(2) = l_d(2) = f(2) \Rightarrow f$ continuă în $x=2$ (2)	1p
	Din (1) și (2) $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive.	1p
6.	$F'(x) = (e^{-x} - 2)' = -e^{-x} - 0 = -e^{-x} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$	4p
	deci $F$ este o primitivă a funcției $f$	1p

SUBIECTUL al II-lea

1.	a)	$(x-3) \cdot (y-3) + 3 = xy - 3x - 3y + 9 + 3 =$ $= xy - 3x - 3y + 12 = x * y, \forall x, y \in G$	3p
	b)	$x * x = (x-3)^2 + 3$	2p
		$x * 6 = 3(x-3) + 3$	1p
		$(x-3)^2 + 3 = 3(x-3) + 3 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 3(x-3) \Rightarrow x_1 = 3 \notin G, x_2 = 6 \in G \Rightarrow x = 6$ soluție	2p

	c)	$\exists e \in G \text{ a.i. } x * e = e * x = x, \forall x \in G \Leftrightarrow (x-3) \cdot (e-3) + 3 = (e-3) \cdot (x-3) + 3 = x, \forall x \in G$ $e = 4 \in G$ $5 * 5^i = 5^i * 5 = 4 \Rightarrow (5-3) \cdot (5^i - 3) + 3 = (5^i - 3) \cdot (5-3) + 3 = 4$ $5^i = \frac{7}{2} > 3 \Rightarrow 5^i = \frac{7}{2}$	<b>2p</b> <b>1p</b>  <b>1p</b>
	a)	$O_2 \in G \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1 \text{ a.i. } O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \in \mathbb{Z} \\ b = 0 \in \mathbb{Z} \end{cases}, a^2 - 3b^2 = 0 \neq 1$ $\Rightarrow O_2 \notin G$ $I_2 \in G \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ a.i. } \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \in \mathbb{Z} \\ b = 0 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a^2 - 3b^2 = 1 \Rightarrow I_2 \in G$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
	b)	$A = \begin{pmatrix} c & d \\ 3d & c \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{Z}, \det A = 1, B = \begin{pmatrix} m & n \\ 3n & m \end{pmatrix}, m, n \in \mathbb{Z}, \det B = 1$ $AB = \begin{pmatrix} cm + 3dn & cn + dm \\ 3(cn + dm) & mc + 3dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}, a = cm + 3dn, b = cn + dm \text{ (1)}$ $c, d, m, n, 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = cm + 3dn \in \mathbb{Z}, b = cn + dm \in \mathbb{Z} \text{ (2)}$ $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1 \text{ (3); Din (1),(2),(3)} \Rightarrow AB \in G$	<b>1p</b> <b>2p</b> <b>1p</b> <b>1p</b>
	c)	$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z}, \det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & (-b) \\ 3(-b) & a \end{pmatrix} \text{ (1)}$ $a, (-b) \in \mathbb{Z} \text{ (2)}, \det(A^{-1}) = 1 \text{ (3)} \stackrel{1,2,3}{\Rightarrow} A^{-1} \in G$	<b>1p</b>  <b>2p</b>  <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

	a)	$\int x f(x) dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx = I_x$ $x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x dx = dt \Rightarrow I_t = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln t  + C$ $I_x = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$	<b>1p</b> <b>3p</b> <b>1p</b>
1.	b)	Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui $f \Rightarrow F$ derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{pt. ca } 1 > 0, x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow F$ crescătoare pe $\mathbb{R}$ .	<b>2p</b> <b>2p</b> <b>1p</b>
	c)	$\int g(x) \cdot \ln x dx = \int \frac{\ln x}{x} dx = I_x$ $\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \Rightarrow I_t = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C$ $\Rightarrow I_x = \frac{\ln^2 x}{2} + C$	<b>1p</b> <b>3p</b> <b>1p</b>
2.	a)	$f_1(x) = x^2 + x + 1$ $\int f_1(x) dx = \int (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$	<b>1p</b> <b>4p</b>
	b)	$f_0(x) = x + 1$ $\int f_0(x) e^x dx = \int (x+1) e^x dx = \int (x+1) \cdot (e^x)' dx =$	<b>1p</b> <b>1p</b>

	$= (x+1)e^x - \int e^x dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$\int 2f_0(x)e^{x^2+2x+3} dx = \int 2(x+1)e^{x^2+2x+3} dx = I_x$	<b>1p</b>
	$x^2 + 2x + 3 = t \Rightarrow 2(x+1)dx = dt \Rightarrow I_t = \int e^t dt = e^t + C$	<b>3p</b>
	$I_x = e^{x^2+2x+3} + C$	<b>1p</b>