



TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Tehnologic

Model 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

- 5p 1. Verificați dacă $\bar{3}$ este soluția ecuației $\bar{2}x + \bar{3} = \bar{1}$, $x \in \mathbb{Z}_4$
- 5p 2. Fie legea de compoziție $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x * y = x + y + xy$. Să se calculeze $5 * (-4)$
- 5p 3 Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x * y = x + y + 2$. Să se determine elementul neutru al acestei legi.
- 5p 4. Să se calculeze $\int_1^2 \frac{2x^2+x+1}{x} dx$.
- 5p 5. Să se calculeze $\int \frac{\ln x}{x} dx$.
- 5p 6. Fie funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2 + 2$, $F(x) = e^x + x^3 + 2x - 1$. Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f .

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.
- 5p a) Să se arate că $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = x$.
- 5p c) Să se calculeze $1 * 2 * 3 * \dots * 2017$.
2. Se dă mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^* \right\}$
- 5p a) Arătați că $I_2 \in G$
- 5p b) Să se verifice că $A(x) \cdot A(y) = A(xy)$, $(\forall)x, y \in \mathbb{R}^*$;
- 5p c) Calculați $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(5)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 3\sqrt{x}$
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 3\sqrt{x}) dx = \frac{23}{6}$
- 5p b) Determinați primitiva funcției $f(x)$, pentru care $F(0) = 1$
- 5p c) Arătați că orice primitivă a funcției $f(x)$ este crescătoare pe $(0, \infty)$.
2. Se consideră integralele $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}$.
- 5p a) Să se calculeze I_0 .
- 5p b) Să se determine I_1 .
- 5p c) Să se arate că $I_n + nI_{n-1} = 2^n e^2 - e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.



B A R E M
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Tehnologic

Model 2

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1	$\widehat{2} \cdot \widehat{3} + \widehat{3} = \widehat{6 + 3}$ $= \widehat{1}$ în \mathbb{Z}_4	3p 2p
2	$5 * (-4) = 5 + (-4) + 5 \cdot (-4) =$ $= -19$	2p 3p
3	Definiția elementului neutru $x * e = x \Leftrightarrow x + e + 2 = x \Leftrightarrow e = -2$ $e * x = -2 * x = -2 + x + 2 = x$	1p 2p 2p
4	$\int_1^2 \frac{2x^2+x+1}{x} dx = 2 \int_1^2 \frac{x^2}{x} dx + \int_1^2 \frac{x}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx =$ $\frac{2^2-1^2}{2} + 2 - 1 + \ln 2 - \ln 1 = 4 + \ln 2$	2p 3p
5	$\ln x = t, \quad \frac{1}{x} dx = dt$ $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + C$	2p 3p
6	$F(x)$ o primitivă a funcției $f(x)$, rezultă $F'(x) = f(x)$ $F'(x) = (e^x + x^3 + 2x - 1)' = e^x + 3x^2 + 2$ Finalizare	1p 3p 1p

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a	$(x - 5)(y - 5) + 5 = xy - 5x - 5y + 30$ $= x * y, \forall x, y \in R.$	3p 2p
1.b	$x * x = (x - 5)(x - 5) + 5 = (x - 5)^2 + 5$ $(x - 5)(x - 6) = 0, x_1 = 5, x_2 = 6.$	2p 3p
1.c	$x * 5 = 5(1)$ $5 * x = 5(2)$ Legea este asociativă(3) Din (1),(2),(3) rezultă că $x * 5 * y = (x * 5) * y = 5 * y = 5.$	2p 2p 1p
2.a	$I_2 = A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{R}^*$ Deci $I_2 = A(1) \in G$	3p 2p
2.b	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y-1 \\ 0 & y \end{pmatrix} =$	2p



	$= \begin{pmatrix} 1 & y-1+xy-y \\ 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & xy-1 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = A(xy), (\forall)x, y \in \mathbb{R}^*$	3p
2.c	$A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(5) = A(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = A(120)$ $= \begin{pmatrix} 1 & 120-1 \\ 0 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 119 \\ 0 & 120 \end{pmatrix}$	3p 2p

SUBIECTUL III

(30 de puncte)

1.a	$\int_1^2 (f(x) - 3\sqrt{x}) dx = \int_1^2 (x^2 + x) dx$	1p
	$\int_1^2 (x^2 + x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big _1^2$	2p
	Finalizare	2p
1.b	$F(x) = \int f(x) dx$	1p
	$\int (x^2 + x + 3\sqrt{x}) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\sqrt{x} + C$	2p
	$F(0)=1 \Rightarrow C=1$	1p
	Finalizare	1p
1.c	$F(x)$ o primitivă a funcției $f(x) \Rightarrow F'(x)=f(x)$	1p
	$F(x)$ crescătoare pe $(0, \infty) \Rightarrow F'(x) > 0$	1p
	$f(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$	2p
	Finalizare	1p
2.a	$I_0 = \int_1^2 e^x dx =$	2p
	Finalizare $I_0 = e^2 - e$	3p
2.b	$I_1 = \int_1^2 x e^x dx = \int_1^2 x (e^x)' dx =$	2p
	$= x e^x \Big _1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$	3p
2.c	$I_n = \int_1^2 x^n e^x dx = \int_1^2 x^n (e^x)' dx =$	2p
	$= x^n e^x \Big _1^2 - n \int_1^2 x^{n-1} e^x dx = 2^n e^2 - e - n I_{n-1}$	3p