TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Ştiinţe ale naturii

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale naturii
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Model 2

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se rezolve ecuația $\hat{2}x + \hat{3} = \hat{1}, x \in \mathbb{Z}_4$.

5p **2.** Fie legea de compoziție $\circ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \circ y = x + y - 2i$, calculați $(i+2) \circ (i-1)$.

5p **3.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție „$*$” definită prin $x * y = xy - 2x - 2y + 6, \forall x, y \in \boldsymbol{R}$. Știind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinați simetricul lui 5 în raport cu legea dată.

5p **4.** Calculați: $\int_1^2 \frac{2x^5 - 5x^2 + 7}{x^3} dx$.

5p **5.** Arătați că funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}}$ este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

5p **6.** Să se calculeze $\int \frac{lnx}{x(1 + ln^2 x)} dx$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție : $x * y = xy + 7x + 7y + 42, \forall x, y \in R$.

5p **a)** Să se demonstreze egalitatea $x * y = (x+7)(y+7) - 7, \forall x, y \in R$

5p **b)** Să se rezolve ecuația $x * (x+1) = -7, x \in R$.

5p **c)** Să se calculeze $(-9) * (-8) * \cdots * 8 * 9$.

2. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2016^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbf{R}$ și mulțimea

$G = \{A_x | x \in \mathbf{R}\} \subset M_3(\mathbf{R})$.

5p **a)** Să se verifice că $I_3 \in G$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5p **b)** Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

5p **c)** Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, pentru\ x \leq 0 \\ -2x+1, pentru\ x > 0 \end{cases}$

5p **a)** Arătaţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că primitiva *F(x)* a functiei *f(x)* este strict crescatoare pe (-∞,0)

5p **c)** Determinați acea primitivă $F_1(x)$ a lui *f(x)* care indeplineste conditia $F_1(0) = 1$.

2. Se consideră funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = (3x+1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x)dx = \frac{5}{2}$

5p **b)** Determinați numărul real *m*, pentru care funcția $F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, F(x) = (3x+m)e^x$ este o primitivă a functiei *f*.

5p **c)** Determinați numărul real nenul *a*, știind că $\int_0^a f(x)dx = 3a$.

B A R E M
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Ştiinţe ale naturii

Model 2

- **Pentru orice solutie corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvari partiale, in limitele punctajului indicat in barem.**
- **Se acorda 10 puncte din oficiu. Nota finala se calculeaza prin impartirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

Subiectul I 30 de puncte

1	Pentru fiecare valoare verificată corect câte 1 punct Precizarea soluției $\{\hat{1}, \hat{3}\}$	4p 1p
2	(i+2) ∘(i-1) = i+2+i-1-2i = 1	2p 3p
3	$x * 5 = 3$, unde x este simetricul lui 5 în raport cu legea dată $x = \frac{7}{3}$	2p 3p
4	$\int_1^2 \frac{2x^5 - 5x^2 + 7}{x^3} dx = 2\int_1^2 x^2\, dx - 5\int_1^2 \frac{1}{x} dx + 7\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$ Finalizare : $\frac{175}{24} - 5ln2$	2p 3p
5	F primitivă a lui f <=> $\int f(x)dx = F(x)$ sau $(F(x))' = f(x)$ Finalizare	2p 3p
6	$lnx = t,\ \frac{1}{x}dx = dt$ $\int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) =$ $= \frac{1}{2}\ln(1 + ln^2 x) + C$	2p 2p 1p

Subiectul al II-lea 30 puncte

1.a)	$xy + 7x + 7y + 42 = (x+7)(y+7) - 7$ Finalizare	1p 4p
b)	$x*(x+1) = (x+7)(x+8) - 7$ $(x+7)(x+8) - 7 = -7$ X∈ $\{-7, -8\}$	2p 2p 1p
c)	verificare $(-7)*(x) = -7$ $(x)*(-7) = -7$ $(-9)*(-8)*\cdots*8*9$ = -7.	2p 2p 1p
2.a)	$\left.\begin{array}{l} A_0 = \begin{pmatrix} 2016^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \\ A_0 \in G \end{array}\right\} \Rightarrow I_3 \in G$	5p

b)	$A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 2010^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2010^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2010^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} =$ $= A_{x+y},\ \forall x,\ y \in \mathbf{R}$	3p 2p
c)	Partea stabila. Conform punctului b) $A_x \cdot A_y = A_{x+y} \in$ G, $\forall x,\ y \in \mathbf{R} \Rightarrow$ G este parte stabilă a lui $M_3(R)$ în raport cu "$\cdot$".	1p
	Asociativitatea .Înmulţirea matricelor pe mulţimea G este asociativă deoarece este operaţie indusă de înmulţirea matricelor pe $M_3(R)$. Comutativitatea: $\forall A_x,\ A_y \in G,\ A_x \cdot A_y = A_y \cdot A_x$ $\left.\begin{matrix} A_x \cdot A_y = A_{x+y},\ \forall x,\ y \in \mathbf{R} \\ A_y \cdot A_x = A_{y+x} = A_{x+y} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "$\cdot$" comutativă	1p 1p
	Elementul neutru: $\exists A_0 = I_3 \in G$, conform a)	1p
	Elemente simetrizabile: $\forall A_x \in G,\ \exists A_{x'} \in G$ astfel încât $A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3$ $A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3 \Leftrightarrow A_{x+x'} = A_{x'+x} = A_0$ $A_{x'} = A_{-x} \in G$ este simetricul lui A_x.	1p

Subiectul al III-lea **30 puncte**

1.a)	$l_s(0) = 1, l_d(0) = 1, f(0) = 1, deci$ f continua in x=0 f continua pe $\mathbf{R} - \{0\}$ ca functii elementare, deci f continua pe $\mathbf{R}$ f admite primitive pe $\mathbf{R}$	2p 1p 2p
b)	primitiva F(x) a functiei f(x) este strict crescatoare pe (-∞,0) daca $F'(x) = f(x) > 0$ f(x) > 0	2p 3p
c)	$F_1(x) = \int \frac{1}{x^2+1} dx = arctg\ x + c$ $F_1(0)=1$ c =1 $F_1(x) = \text{arctg}\ x + 1$	2p 1p 1p 1p
2.a)	a) $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x) dx = \int_0^1 (3x+1) dx =$	2p 3p

	$=\left(\frac{3x^2}{2}+x\right)\Big\vert_0^1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$	
b)	b) $F'(x)=(3x+m)'e^x+(3+m)(e^x)'=3e^x+(3x+m)e^x=(3x+m+3)e^x$ $F(x)=f(x)\Leftrightarrow (3x+m+3)e^x=(3x+1)e^x, \forall x\in \boldsymbol{R}$, deci $m=-2$	3p 2p
c)	c)) $\int_0^a(3x+1)e^x dx=(3x-2)e^x\vert_0^a=(3a-2)e^x+2$ $(3a-2)e^x+2=3a \Leftrightarrow (3a-2)(e^x-1)=0, a\in \boldsymbol{R}, a\neq 0 \Longrightarrow a=\frac{2}{3}$	3p 2p