

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Științe ale naturii
Filiera teoretică, profilul real, specializarea Științe ale naturii
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.
SUBIECTUL I (30 de puncte)

- 5p** 1. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = 7x + 7y - 3xy - 14$. Calculați $3 * (-4)$.
- 5p** 2. Rezolvați în Z_4 ecuația $x^2 + x = \hat{2}$.
- 5p** 3 Pe mulțimea \mathbb{R} definim legea de compoziție, $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, determinați elementul neutru.
- 5p** 4. Calculați: $\int \frac{x^3 + 4x + 1}{x^2} dx, x > 0$.
- 5p** 5. Calculați: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.
- 5p** 6. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Determinați valorile numerelor reale a, b, c dacă funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x + 8$ este o primitivă a funcției f .

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

- 5p** 1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x * y = xy + 3x + 3y + 6, \forall x, y \in \mathbf{R}$.
- 5p** a) Să se demonstreze egalitatea $x * y = (x + 3)(y + 3) - 3, \forall x, y \in \mathbf{R}$.
- 5p** b) Determinați două elemente $a, b \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ astfel încât $a * b \in \mathbf{Z}$.
- 5p** c) Rezolvați în \mathbf{R} ecuația $x * x * x = x$.
- 5p** 2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\} \right\}$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 3ab), \forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$.
- 5p** b) Demonstrați că $[X(a)]^{-1} = X\left(-\frac{a}{1+3a}\right), (\forall) a \neq -\frac{1}{3}$.
- 5p** c) Să se arate că (G, \cdot) este grup comutativ.
- SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)**

- 5p** 1. Se consideră funcțiile $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = (x+1)e^x$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+2)e^x$.
- 5p** a) Arătați că funcția F este primitiva funcției f .
- 5p** b) Arătați că funcția F este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.
- 5p** c) Calculați $\int F(x) \cdot f(x) dx$.
- 5p** 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, & x \in (-\infty, 1] \\ \ln x - 2, & x \in (1, \infty) \end{cases}$
- 5p** a) Arătați că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Calculați $\int_0^1 (x-2)f(x) dx$.
- 5p** c) Arătați că orice primitivă a lui f este convexă pe $(1, \infty)$.