MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - ETAPA LOCALĂ 2018

CLASA A 11 A

Soluții și barem de corectare

1. a) calcul direct (4p)

b) Avem $\det(A+B+C)+\det(A+B-C)+\det(A-B+C)+\det(A-B-C)=$ $2(\det(A+B)+\det(C))+2(\det(A-B)+\det(C))=2(\det(A+B)+\det(A-B))+4=12$, de unde concluzia (3p)

2. a) Dacă $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$, obținem relațiile

$a^2+bc=2016$ (1)

$b(a+d)=2015$ (2)

$c(a+d)=2017$ (3)

$d^2+bc=2018$ (4)

Din (2) și (3) rezultă că b,c și $a+d$ sunt impare. Atunci din (1) și (4) obținem că a și d sunt impare, de unde $a+d$ este par, contradicție (3p)

b) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$, și presupunem că $A^n=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ cu x,y,z,t impare.

Din $A\cdot A^n=A^n\cdot A$ obținem

$bz=cy$ (1)

$ay+bt=bx+dy$ (2)

Din (1) avem $b\equiv c(\bmod 2)$ iar din (2) avem $a\equiv d(\bmod 2)$. Pe de altă parte $\det(A^n)=xt-yz$, deci $(ad-bc)^n=xt-yz$, deci $ad\equiv bc(\bmod 2)$.

Așadar a,b,c,d au aceeași paritate, deci A^2 are toate elementele numere pare, de unde, inductiv, A^n are toate elementele pare, fals (4p)

3. a) Se arată inductiv că $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător (2p) și $a_n > 0, n \geq 1$, deci convergent (1p)

b) Se arată că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (1p)

Folosind Lema Stolz-Cesaro rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{1 + a_n^2} = 1 \text{ (3p)}$$

4. a) Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2(x)$ verifică cerința (3p)

b) Să presupunem că există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$ pentru orice $x \in (0,\infty)$. Se arată prin inducție că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2^n x) - f(x)\right) = n,$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte rezultă că $f(2^n x) - f(x) \leq 2M,$ pentru orice $x > 0, n \in \mathbb{N}^*$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2^n x) - f(x)\right) \leq 2M,$ adică $n \leq 2M,$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*,$ fals (4p)