MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

Olimpiada de matematica
Etapa locala- 18.02.2018
Clasa a VII-a

Soluții si barem de corectare

PROBLEMA 1

$\frac{x-1}{1000}+\frac{x-2}{999}+\frac{x-3}{998}+\ldots+\frac{x-1000}{1}=1000 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{x-1}{1000}-1\right)+\left(\frac{x-2}{999}-1\right)\ldots\left(\frac{x-1000}{1}-1\right)=0$ 2p

$\Leftrightarrow\left(\frac{x-1001}{1000}\right)+\left(\frac{x-1001}{999}\right)\ldots\left(\frac{x-1001}{1}\right)=0$ 2p

$(x-1001)\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{999}+\frac{1}{998}\ldots\frac{1}{1}\right)=0 \Leftrightarrow x-1001=0 \Longrightarrow$ 2p

$x=1001$ 1p

PROBLEMA 2

Soluție :

a) Folosim formula lui Gauss pentru calculul numitorilor din paranteză obținem :

$\frac{1}{1+2+\ldots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ 1p

....

$\frac{1}{1+2+\ldots+(2k-1)}=\frac{1}{\frac{(2k-1)(2k-1+1)}{2}}=\frac{2}{2k(2k-1)}=2\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ 1p

Însumând , relația din enunț devine :

$n=k^{901}\cdot\left(\frac{1}{1+2+\ldots+k}+\frac{1}{1+2+\ldots k+(k+1)}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+(2k-1)}\right)=2\cdot k^{901}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=2\cdot k^{901}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k}\right)=2\cdot k^{901}\cdot\frac{1}{2k}=k^{900}$ 2p

$\frac{4n}{k^{533}}=\frac{k^{367}}{x^2}\Leftrightarrow 4\cdot n\cdot x^2=k^{533}\cdot k^{367}\Leftrightarrow 4\cdot k^{900}\cdot x^2=k^{900}$

$4\cdot x^2=1\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$ 1p b)Folosim următoarele inegalități :

$|1-a_1| = |a_1-1| \geq a_1-1$

$|3-a_2| = |a_2-3| \geq a_2-3$

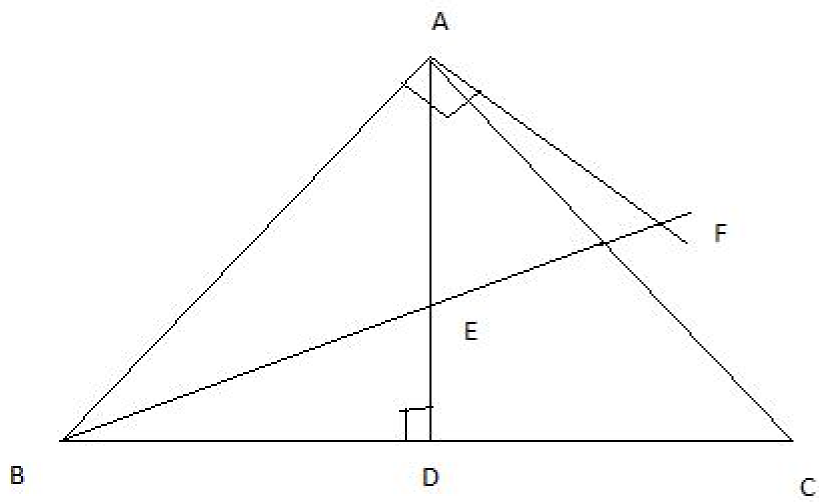
....

$|207-a_{104}| = |a_{104}-207| \geq a_{104}-207$ 1p

Adunând aceste relații obținem :

$|1-a_1|+|3-a_2|+|5-a_3|+\ldots+|207-a_{104}| \geq a_1+a_2+a_3+\ \ldots+a_{104}-1-3-5-\ldots-207 = 208^2-104^2 = 3\cdot 104^2$ 1p

PROBLEMA 3



a) În triunghiul ABE , $m(\sphericalangle AFB) = 90^0 - m(\sphericalangle ABF)$ 1p
$m(\sphericalangle BED) = 90^0 - m(\sphericalangle EBD) = m(\sphericalangle AEF)$ de unde cerința 2 p

b) ÎntriunghiulABD,[$BE - bisectoare \Longrightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{ED}$ 1p
$\Delta ABF \sim \Delta DBE \Longrightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{BF}{BE}$ 2p
$Din\ cele\ două relații\ \ rezultă\ \frac{BF}{BE} = \frac{AE}{ED}$ 1p

PROBLEMA 4

a) AN = BN și MN = NO deci AOBM paralelogram 2p
b) CN și MP mediane în triunghiul MOC 1p
G centrul de greutate al triunghiului MOC $\Longrightarrow \frac{CG}{CN} = \frac{2}{3}$ 1p
CN mediană în triunghiul ABC , deci G centru de greutate al său 1p

c) În triunghiul OMC , NP linie mijlocie $\Longrightarrow NP \parallel MC \Longrightarrow NP \parallel QR \Longrightarrow$ NPRQ trapez . 2p