OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală 18.02. 2018

Clasa a XI -a

Problema 1.

a) Să se arate că $\det(A+B)+\det(A-B)=2(\det(A)+\det(B))$, pentru orice matrice $A,B\in M_2(\mathbb{C})$.

b) Fie matricele $A,B,C\in M_2(\mathbb{C})$ cu $\det(A)=\det(B)=\det(C)=1$. Să se arate că există o alegere a semnelor "$+$" sau "$-$" astfel încât $\det(A\pm B\pm C)\geq 3$.

Problema 2.

a) Există matrice $A\in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că $A^2=\begin{pmatrix}2016 & 2015\\ 2017 & 2018\end{pmatrix}$? Justificare.

b) Fie $A\in M_2(\mathbb{Z})$ și $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Să se arate că A^n nu poate avea toate elementele numere întregi impare.

Problema 3.

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=1$ și $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n^2}{n+1}, n\geq 1$.

a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$.

Problema 4.

Fie o funcție $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2x)-f(x)\right)=1$.

a) Să se dea exemplu de o astfel de funcție.

b) Să se arate că f este nemărginită.

1.Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
2.Toate problemele sunt obligatorii;
3.Fiecare problemă se notează de la 0 la 7