OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 16 februarie 2018

Clasa a V-a

1. Într-o zi a anului 2017, întrebat de un reporter ce vârstă are fiul său, tatăl a răspuns: "Fiul meu s-a născut după anul 2000 şi are vârsta egală cu suma cifrelor anului naşterii." În ce an s-a născut copilul şi ce vârstă va avea în 2018?

Aurel Aldea

2. Determinaţi numerele naturale a şi b care verifică următoarea propoziţie matematică: $5^{a^2+b+3} - 5^{a^2+1} = 600$.

Ioana Ciocirlan

3. Pe o tablă sunt scrise numerele: 1, 3, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 22. Ana şterge patru numere, iar Dan şterge alte patru numere. Ce număr a rămas pe tablă dacă suma numerelor şterse de Dan este de două ori mai mare decât suma numerelor şterse de Ana?

Gazeta Matematică

4. Fie numerele naturale, nenule, a şi b, astfel încât $6a + 5b = 600$.

   (a) Arătaţi că a este divizibil cu 5 şi $a < 100$.

   (b) Arătaţi că $100 < a + b < 120$.

   (c) Dacă $c = 2^{n+3} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+2} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, aflaţi câtul şi restul împărţirii numărului $x = 102 \cdot a + 85 \cdot b + 100 \cdot c$ la 1700, unde a şi b sunt numerele care satisfac relaţia din enunţ.

Dorina Bocu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 16 februarie 2018

Clasa a VI-a

1. La împărţirea unui număr natural n cu 32, 63 şi 72, se obţine, de fiecare dată, restul 2. Determinaţi cel mai mic număr natural n, de patru cifre, care are această proprietate.

Adriana Caţaron

2. Determinaţi cel mai mic număr natural n, pentru care numărul $a \in \mathbb{N}$, unde

$$a = \frac{27^{n+3} - 3 \cdot 27^{n+2} - 2 \cdot 3^{3n+5}}{3^{2017} - 3^{2016} + 3^{2015}}.$$

Gazeta Matematică: Supliment cu Exerciţii

3. Să se determine măsura celui mai mic unghi propriu care are proprietatea că suplementul complementului său împărţit la $\frac{7}{22}, \frac{3}{11}, \frac{5}{6}$ dă ca rezultat un număr natural.

Aurel Aldea

4. În triunghiul ascuţitunghic MNP ($[MN] < [MP]$), O este mijlocul laturii $[NP]$, $NA \perp MO$, $PB \perp MO$ şi $C \in (AM)$ astfel încât $[MC] = 2[AO]$. Arătaţi că

   (a) $\widehat{ANB} \equiv \widehat{BPA}$.

   (b) $[CP] \equiv [MN]$.

Dorina Bocu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 16 februarie 2018

Clasa a VII-a

1. Fie $A = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + ... + \frac{1}{2017^2+2017}$. Arătaţi că $A \cdot \frac{2018}{2017}$ este un număr natural.

Gazeta Matematică

2. Considerăm numerele raţionale $A = \frac{2^{2018}+1}{2^{2016}+1}$, $B = \frac{2^{2017}+1}{2^{2015}+1}$, $C = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2018}+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2016}+1}$ şi $D = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2015}+1}$.

   (a) Arătaţi că $A > B$.

   (b) Determinaţi $\max\{A, B, C, D\}$ şi $\min\{A, B, C, D\}$.

Ioana Maşca

3. În pătratul $ABCD$, punctul $E \in (AC)$ astfel încât $m(\widehat{ABE}) = 15°$. $ABFE$ este un paralelogram cu E şi F de o parte şi de alta a dreptei BC.

   (a) Demonstraţi că $BFCE$ este trapez isoscel.

   (b) Dacă $AE = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$ cm, $BE + 2AE = AB\sqrt{2}$ şi $\mathcal{P}_{BFCE} = 4\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$ cm, aflaţi aria trapezului $BFCE$.

Dorina Rapcea

4. Fie $ABCD$ un paralelogram, $AC \cap BD = \{O\}$, $M \in (DC)$ astfel încât $CM = 2DM$ şi $N \in (BC)$ astfel încât $BN = 2NC$. Aria triunghiului CMN este de 16 cm^2.

   (a) Aflaţi aria paralelogramului $ABCD$.

   (b) Dacă $OM \cap AD = \{F\}$ astfel încât $FM = 2MO$, arătaţi că $BCFD$ paralelogram.

Ioana Ciocirlan

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 16 februarie 2018

Clasa a VIII-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor raţionale ecuaţia:
$$\frac{x-2}{2017}+\frac{x-3}{2018}+\frac{x-4}{2019}=\frac{x+2013}{2}+\frac{x+2012}{3}+\frac{x+2011}{4}.$$
Gazeta Matematică: Supliment cu Exerciţii

2. Determinaţi numerele prime p pentru care există numere naturale nenule x şi y astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2018\cdot p}$.

Aurel Bârsan

3. Fie un cub $ABCDA'B'C'D'$, M mijlocul laturii $[AB]$ şi E simetricul lui D' faţă de M. Demonstraţi că $DB'\perp(A'C'E)$.

Andrei Caţaron

4. $CREATI$ este o prismă triunghiulară dreaptă, cu toate muchiile de lungime 6 cm. M este mijlocul muchiei laterale $[AC]$.
   (a) Aflaţi distanţa de la punctul M la planul $(TREI)$.
   (b) Aflaţi tangenta unghiului dintre dreptele AR şi CI.

Dorina Bocu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.