BAREM
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Tehnologic - 13.12.2018*

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărtirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1	$1 * (-3). = 1 + (-3) - 3 =$ $= -5$	2p 3p
2	$x = \hat{0} => \hat{3} = \hat{0}$ Fals $x = \hat{1} => \hat{2} = \hat{0}$ Fals $x = \hat{2} => \hat{1} = \hat{0}$ Fals $x = \hat{3} => \hat{0} = \hat{0}$ $S = \{\hat{3}\}$	1p 1p 1p 1p 1p
3	$8 * 81 = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 81} =$ $= \sqrt{16} \cdot \sqrt{81} =$ $= 36 \in \mathbb{N}$	1p 2p 2p
4	$\int \frac{x^3}{x^2} dx + 5 \int \frac{x}{x^2} dx + 3 \int \frac{1}{x^2} dx$ $\frac{x^2}{2} + 5ln\lvert x\rvert - 3x^{-1} + C$	2p 3p
5	$\int f(x)dx = \int (x^3 - 1)dx = \int x^3 dx - \int dx =$ $= \frac{x^4}{4} - x + C$ Dacă primitiva se anulează în 1, avem: $\frac{1^4}{4} - 1 + C = 0$ $C = \frac{3}{4}$	1p 2p 1p 1p
6	$\int_0^1 xe^x dx + 2 \int_0^1 e^x dx.$ $\int_0^1 e^x dx = e - 1$ $\int_0^1 xe^x dx = 1$ Finalizare	1p 1p 2p 1p

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a	xy-3x-3y+12 = x(y-3) - 3(y-3) + 3 =	2p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

	= (x- 3)(y- 3) + 3	3p
1.b	xoe = eox = x pentruorice x∈ R (x- 3)(e-3) + 3 = x => e - 3 = 1 => e = 4 ∈ G	3p 2p
1.c	xo3 = 3 și 3ox = 3pentruorice x∈ R. 1o2o3o40……o100 = 3	2p 3p
2.a	I$I_2 = A(x) \Rightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ x=1 \end{cases}$ $I_2 = A(1) \in G$	3p 2p
2.b	$A(x)\cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 1-xy \\ 0 & xy \end{pmatrix} \cdot =$ $= A(xy)$	4p 1p
2.c	Conform b) Geste parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor Inmultirea matricelor este asociativă Din a) avem elemental neutru Elementele simetrizabile Comutativitatea	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a	Funcţia admite primitive pe R dacă este continuă pe R. $l_s(-1) = e^0 = 1, l_d(-1) = 1, f(-1) = 1$, deci f este continuă în 1 ⇒f continuă pe R, deci admite primitive	1p 3p 1p
1.b	Pentru $x \leq -1, F(x) = \int e^{x+1}dx =$ $= e^{x+1} + C$	3p 2p
1.c	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (2+x)dx =$ $\int_0^1 2dx + \int_0^1 xdx =$ $2x \Big\vert_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big\vert_0^1 =$ $= \frac{5}{2}$	1p 1p 2p 1p
2.a	$f(x) = F'(x)$ $F'(x) = x^2 - 5x + 6 = f(x)$	1p 4p
2.b	$F'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$ Din tabelul de semn rezultă că $F' < 0\ pe\ (2,3)$ Deci F este strict descrescătoare pe (2,3)	3p 1p 1p
2.c	$F(x) = t, \qquad F'(x)dx = dt$ $\int F(x)F'(x)dx = \int t\ dt = .$	2p 1p 2p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

	$=\frac{t^2}{2}=\frac{(F(x))^2}{2}$	

BAREM
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Ș*tiinţe ale naturii - 13.12.2018*

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărtirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

Subiectul I 30 de puncte

1	$x\circ x=4 => x^2+10+16=0$ $x_1=-2\,;\ x_2=-8$	2p 3p
2	$\hat{3}+\hat{4}\cdot\hat{2}=\hat{3}+\hat{3}=$ $=\hat{1}$	3p 2p
3	$x\circ(-4)=(-4)\circ x=-4$ $x\circ(-4)=(-4)\circ x=-4$ *Finalizare*	2p 2p 1p
4	$\int 1dx+\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$ $x+ln\left\|x+\sqrt{x^2+1}\right\|+C$	3p 2p
5	$\int_1^2\frac{dx}{9-x^2}=-\frac{1}{6}\ln\left\|\frac{x-3}{x+3}\right\|\Big\|_1^2=$ $=\frac{1}{6}\ln\frac{5}{2}$	3p 2p
6	F'(x) = $(\frac{lnx}{x})'=\frac{(lnx)'\cdot x-lnx\cdot x'}{x^2}$ $=\frac{1-lnx}{x^2}$ = f(x).	3p 2p

Subiectul al II-lea30 puncte

1.a)	$(x+3)(y+3)-3=xy+3x+3y+9-3$ Finalizare	3p 2p
b)	a∘b∈ℚ $=> (a+3)(b+3)\in\mathbb{Q}$ $(a+3),(a+3)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ Finalizare	1p 2p 2p
1.c	$x\circ x\circ x=(x+3)^3-3$ $(x+3)[(x+3)^2-1]=0 => (x+3)(x+2)(x+4)=0$ $x\in\{-4,-3,-2\}$	1p 2p 2p
2.a)	$I_3=A_0$	4p

	Finalizare	1p
b)	Calcul direct Finalizare	4p 1p
c)	$\mathbf{P} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{100} = A_{1+2+\cdots+100} =$ $= A_{5050}$	2p 3p

Subiectul al III-lea **30 puncte**

1.a)	$l_s(0) = 0, l_d(0) = 0, f(0) = 0, deci$ f continua in x=0 f continua pe **R** –{0} ca functii elementare, deci f continua pe **R** f admite primitive pe **R**	2p 1p 2p
b)	$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} (x+\sqrt{x})dx = \left.\frac{x^4}{4}\right\|_{-1}^{0} + \left.\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\right\|_{0}^{1} =$ $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$	3p 2p
c)	Fie F o primitiva a lui f $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a); \int_{b}^{c} f(x)dx = F(c) - F(b)$ F(b) - F(a) = F(c) - F(b) ; de unde 2F(b) = F(a) +F(c)	3p 2p
2.a)	$\int_{e}^{e^2} \frac{f_3(x)}{\ln^3(x)} dx = \int_{e}^{e^2} x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right\|_{e}^{e^2}$ Finalizare $\frac{e^2(e^2-1)}{2}$	3p 2p
b)	$I_1 = \int_{1}^{e} f_1(x)dx = \int_{1}^{e} x \ln x$ $\left.\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\right\|_{1}^{e}$ Finalizare $\frac{2e^2-1}{4}$	1p 3p 1p
c)	$\int_{1}^{e} f_{2019}(x)dx - \int_{1}^{e} f_{2018}(x)dx = \int_{1}^{e} x ln^{2018} x\,(\ln x - 1)dx \le 0$ Finalizare	4p 1p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

BAREM
TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Matematică-informatică - 09.12.2016*

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărtirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

1.	$\frac{13}{5} * \sqrt{3} = \sqrt{\frac{144}{25} + 5 - 4} =$ $= \sqrt{\frac{169}{25}} = \mathbf{\frac{13}{5}}$	**2p** **3p**
2.	$x\circ 2-x+2-2=x\,;\, x\circ 2x=x+2x-2=3x-2\,;\, -3\circ 4x=-3+4x-2=4x-5$ $\div\; x\circ 2; x\circ 2x; -3\circ 4x \Leftrightarrow 3x-2=\frac{x+4x-5}{2} \Leftrightarrow$ **Finalizare :** $x=-1$	**3p** **1p** **1p**
3.	$P=\frac{numar\ cazuri\ favorabile}{numar\ cazuri\ posibile}=\frac{\lvert U(\mathbb{Z}_{10})\rvert}{\lvert \mathbb{Z}_{10}\rvert}$ $U(\mathbb{Z}_{10})=\{\hat{1},\hat{3},\hat{7},\hat{9}\} \Rightarrow \lvert U(\mathbb{Z}_{10})\rvert=4$ $\lvert \mathbb{Z}_{10}\rvert=10$ **Finalizare :** $P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	**1p** **2p** **1p** **1p**

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

4.	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}dx = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}} \Big\vert_0^1 =$ $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg 0\right) =$ **Finalizare:** $= \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$	3p 1p 1p
5.	F primitiva lui $f \Leftrightarrow F$ derivabilă pe $(0,\infty)$ şi $F'(x) = f(x), \forall x \in (0,\infty)$ $F'(x) = (x\ln x)' - (\ln 5)' = \ln x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} - 0 = \ln x + 1$ **Finalizare:** $f(x) = \ln x + 1$, $\forall x \in (0,\infty)$	1p 3p 1p
6.	$\int \frac{1-cos^2x}{1-sin^2x}dx = \int \frac{1-cos^2x}{cos^2x}dx = \int \frac{1}{cos^2x}dx - \int 1dx$= $tgx - x + C$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

1.	a)	$(x+i)(y+i) - i = xy + ix + iy - 1 + i =$ $= xy + i(x+y) - (1+i) =$ $= x \circ y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ **Finalizare**	2p 2p 1p
	b)	$(x\circ y)\circ z = (x+i)(y+i)(z+i) - i$ $x\circ(y\circ z) = (x+i)(y+i)(z+i) - i$	2p

		Finalizare: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ legea „$\circ$” este asociativă.	**2p** **1p**
	c)	$x \circ (-i) = -i, \forall x \in \mathbb{C}$ $(-2018i) \circ (-2017i) \circ \ldots \circ (-2i) \circ (-i) =$ $\overset{\substack{"\circ" asoc \\ conf\ b)}}{=} \left[(-2018i) \circ (-2017i) \circ \ldots \circ (-2i) \right] \circ (-i) = x \circ (-i) = -i$ Unde $\left[(-2018i) \circ (-2017i) \circ \ldots \circ (-2i) \right] \overset{not}{=} x$	**2p** **3p**
2.	a)	$A(x) \cdot A(y) = A(x + y - 2xy), \forall A(x), A(y) \in M$ $x, y, 2 \in \mathbb{R} \Rightarrow (x + y - 2xy) \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow A(x) \cdot A(y) = A(x + y - 2xy) \in M, \forall A(x), A(y) \in M$	**3p** **1p** **1p**
	b)	$\exists A(e) \in M$,$a.i. A(x) \circ A(e) = A(e) \circ A(x) = A(x), \forall A(x) \in M$ $A(x) \circ A(e) = A(e) \circ A(x) = A(x + e - 2xe), \forall A(x) \in M$ $A(x) = A(y) \Leftrightarrow x = y$ $A(x) \circ A(e) = A(x) \Rightarrow x + e - 2xe = x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 0 \in \mathbb{R}$ **Finalizare:** $A(e) = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**
	c)	$f(A(x) \cdot A(y)) \overset{a)}{=} f(A(x + y - 2xy)) = x + y - 2xy,, \forall A(x), A(y) \in M$ $f(A(x)) \circ f(A(y)) = x \circ y = x + y - 2xy,, \forall A(x), A(y) \in M$ **Finalizare:** $f(A(x) \cdot A(y)) = f(A(x)) \circ f(A(y)), \forall A(x), A(y) \in M$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)$. F primitiva lui $f \Rightarrow F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$ $1=F'(0)=f(0)=a$ **Finalizare:** $a=1\in\mathbb{R}^*$.	2p 1p 1p 1p
	b)	F este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow F'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ Cum $e^{-x}>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow ax^2+4x+a\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow a>0, \Delta\leq 0$ $\Delta=16-4a^2\leq 0 \Leftrightarrow a\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$, dar $a>0$ **Finalizare:** $a\in[2,\infty)$	1p 2p 1p 1p
	c)	$F''(x)=f'(x)=e^{-x}\left[-ax^2+2(a-2)x+4-a\right]$ $F''(x)=0 \Leftrightarrow -ax^2+2(a-2)x+4-a=0;\ \Delta=16>0, \forall a\in\mathbb{R}^*$ **Finalizare:** F'' are 2 rădăcini reale distincte şi schimbă semnul de 2 ori pe $\mathbb{R}$, $\forall a\in\mathbb{R}^*$, deci F are 2 puncte de inflexiune , $\forall a\in\mathbb{R}^*$	2p 2p 1p
2.	a)	$I_1=\int_0^1 \dfrac{x}{x^2+2018}dx=$ $\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{2x}{x^2+2018}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2018\right)\Big\vert_0^1$ **Finalizare:** $I_1=\dfrac{1}{2}\left(\ln(2019)-\ln(2018)\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2019}{2018}\right)$	1p 3p 1p
	b)	$I_{n+2}+2018I_n=\int_0^1\dfrac{x^{n+2}}{x^2+2018}dx+\int_0^1\dfrac{x^n}{x^2+2018}dx=$ $=\int_0^1\dfrac{x^{n+2}+2018x^n}{x^2+2018}dx=\int_0^1\dfrac{x^n\cdot\cancel{\left(x^2+2018\right)}}{\cancel{\left(x^2+2018\right)}}dx=\int_0^1 x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{n+1}$	1p 4p

	c)	$\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} I_n = l \in \mathbb{R}$	1p
		$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = l$	1p
		Trecând la limită în relaţia de recurenţă,se obţine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(I_{n+2} + 2018I_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow 2019l = 0 \Rightarrow$	2p
		Finalizare: $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = l = 0$	1p

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54