

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Tehnologic
13.12.2018

Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic toate calificările profesionale

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

- 5p** 1. Fie legea de compoziție $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x * y = x + y - 3$. Să se calculeze $1 * (-3)$.
- 5p** 2. Să se rezolve în Z_4 ecuația $\hat{3}x + \hat{3} = \hat{0}$.
- 5p** 3. Pe mulțimea $M = (0, \infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{2xy}$. Să se demonstreze că $8 * 81 \in \mathbb{N}$.
- 5p** 4. Calculați: $\int \frac{x^3 + 5x + 3}{x^2} dx, x > 0$.
- 5p** 5. Să se determine primitiva funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$ care se anulează în $x = 1$.
- 5p** 6. Calculați: $\int_0^1 (x + 2)e^x dx$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe mulțimea $G = (3, \infty)$ se consider legea de compoziție $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12, \forall x, y \in G$.
- 5** a) Să se arate că $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3, \forall x, y \in G$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al acestei legi.
- 5p** c) Să se calculeze $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 100$
2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1-x \\ 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^* \right\}$.
- 5p** a) Arătați că $I_2 \in G$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $A(x) \cdot A(y) = A(xy)$, oricarear fi $x, y \in \mathbb{R}^*$
- 5p** c) Să se arate că (G, \cdot) este grup comutativ.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \leq -1 \\ 2 + x, & x > -1 \end{cases}$
- 5p** a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Pentru $x \leq -1$, să se determine primitivele funcției.
- 5p** c) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
2. Se consideră funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 100$
- 5p** a) Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât F să fie o primitivă a funcției f .
- 5p** b) Să se demonstreze că F este strict descrescătoare pe intervalul $(2, 3)$.
- 5p** c) Să se calculeze $\int F(x)F'(x) dx$.

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Științe ale naturii
13.12.2018

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

- 5p** 1. Fie legea de compoziție $x \circ y = xy + 5x + 5y + 20, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația $x \circ x = 4$
- 5p** 2. Să se calculeze în \mathbb{Z}_5 : $\hat{3} + \hat{4} \cdot \hat{2}$
- 5p** 3 Pe mulțimea \mathbb{R} definim legea de compoziție, $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $x \circ (-4) = (-4) \circ x = -4, \forall x \in \mathbb{R}$
- 5p** 4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Să se determine primitiva funcției pentru care $F(0) = 1$
- 5p** 5. Calculați: $\int_1^2 \frac{dx}{9-x^2}$.
- 5p** 6. Arătați că funcția $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \frac{\ln x}{x}$ este o primitivă a funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

- 5p** 1. Pe \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - x + ay + b, a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât legea "o" să fie comutativă.
- 5p** b) Pentru $a = -1$, să se determine $b \in \mathbb{R}$, știind că $x \circ y = (x-1)(y-1) + 1$.
- 5p** c) Pentru $a = -1, b = 2$, știind că legea "o" este asociativă, să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x \circ x \circ x \circ x = x$.
- 5p** 2. Fie matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_x = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & 4x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1-2x \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}$ și mulțimea $G = \{A_x | x \in \mathbb{R}\}$.
- 5p** a) Verificați dacă $I_3 \in G$
- 5p** b) Demonstrați că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$ oricare ar fi numerele reale x, y .
- 5p** c) Calculați $P = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{100}$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

- 5p** 1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x + \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$;
- 5p** a) Arătați că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} ,
- 5p** b) Calculați $\int_{-1}^1 f(x) dx$,

5p c) Stiind ca $\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f demonstrați că $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Fie funcțiile $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n: [1, e) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln^n x$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$.

5p a) Calculați $\int_e^{e^2} \frac{f_3(x)}{\ln^3 x} dx$.

5p b) Calculați I_1 .

5p c) Demonstrați că $I_{2019} \leq I_{2018}$.

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I

Clasa a XII-a *Matematică-informatică*

13.12.2018

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

- 5p 1. Pe mulțimea $M = [2, \infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$, $\forall x, y \in M$, calculați $\frac{13}{5} * \sqrt{3}$.
- 5p 2. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y - 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, Să se determine $x \in \mathbb{R}$, știind că numerele: $x \circ 2; x \circ (2x); (-3) \circ (4x)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 3 Care este probabilitatea, ca alegând la întâmplare un element oarecare din mulțimea \mathbb{Z}_{10} , acesta să fie inversabil ?
- 5p 4. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3} dx$.
- 5p 5. Funcția $F: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. $F(x) = x \cdot \ln x - \ln 5$ este o primitivă a funcției $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Determinați f .
- 5p 6. Să se calculeze $\int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe mulțimea \mathbb{C} se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy + i(x + y) - (1 + i)$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$:
- 5p a) Să se arate că $x \circ y = (x + i)(y + i) - i$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$:
- 5p b) Să se arate că legea este asociativă.
- 5p c) Să se calculeze $(-2018i) \circ (-2017i) \circ \dots \circ (-2i) \circ (-i)$.
2. Pe mulțimea $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ se consideră operația de înmulțire a matricelor.
- 5p a) Să se demonstreze că mulțimea M este parte stabilă în raport cu operația de înmulțire a matricelor.
- 5p b) Să se determine elementul neutru al legii.
- 5p c) Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y - 2xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Se consideră funcția $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A(x)) = x$, $\forall A(x) \in M$. Demonstrați că

$$f(A(x) \cdot A(y)) = f(A(x)) \circ f(A(y)), \forall A(x), A(y) \in M$$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}(ax^2 + 4x + a), a \in \mathbb{R}^*$ și $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui f .

5p a) Să se determine a , știind că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1$.

5p b) Determinați a știind că funcția F este strict crescătoare pe \mathbb{R}

5p c) Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, funcția F are două puncte de inflexiune.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}, I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 2018} dx$.

5p a) Calculați I_1 .

5p b) Să se arate că: $I_{n+2} + 2018I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1$.

5p c) Știind că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent, să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$