Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397)
Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
17 februarie 2019

Clasa a V-a

1. La un concurs de matematică se dau 40 de exerciţii. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greşit se scad 2 puncte. Un elev a rezolvat toate exerciţiile şi a primit 144 de puncte.

a) Câte exerciţii a rezolvat corect elevul?

b) Câte exerciţii ar mai trebui să rezolve corect elevul, pentru ca în final să obţină 165 de puncte?

c) Care a fost punctajul maxim care se putea obţine la concursul de matematică?

2. Fie numerele: $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2019$ și $b = 1 + 9 + 17 + \cdots + 2017$.
Să se determine resturile împărțirilor numerelor a, respectiv b la 2018.

3. Determinaţi a şi b, dacă $\overline{ab} + a + b = n^2$, pentru orice număr natural nenul.

4. a) Demonstrați că:
$(2018^{n+1} + 2019^{n+1} + 2018^n - 2019^n) \vdots 2018 \cdot 2019$, pentru orice număr natural nenul.

b) Arătaţi că numărul :
$1^p + 2^p + 3^p + \ldots + 2016^p + 5 \cdot (2017^p + 2018^p) - 1$ este divizibil cu 5, unde p este un număr natural prim impar.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 2 ore.*

Soluţii și bareme orientative
Clasa a V-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Se notează cu a numărul de răspunsuri corecte. Punctajul obţinut pentru răspunsurile corecte este $5a$. Punctajul care se va scădea pentru răspunsurile greşite va fi $2(40-a)$. Punctajul total va fi $5a-2(40-a)$. **(2p)**

a) $5a-2(40-a)=144 \Rightarrow 7a=224 \Rightarrow a=32$ răspunsuri corecte (elevul a rezolvat greşit 8 exerciţii). **(2p)**

b) $5a-2(40-a)=165 \Rightarrow 7a=245 \Rightarrow a=35$ răspunsuri corecte, elevul ar fi trebuit să rezolve corect încă 3 exerciţii. **(2p)**

c) Punctajul maxim care se putea obţine este $5 \text{ X } 40=200$ puncte. **(1p)**

2. Numărul a se scrie $a=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2018\cdot 2019$, deci numărul este divizibil cu 2018 și atunci restul este 0. **(3p)**

Numărul $b=(8\cdot 0+1)+(8\cdot 1+1)+\ldots..+(8\cdot 252+1)=8\cdot 126\cdot 253+253=255277$ **(2p)**

$\Rightarrow y=2018\cdot 126+1009$ și atunci restul este 1009. **(2p)**

3. Deoarece $\overline{ab}+a+b=11a+2b\in\{11,12,\ldots,\ 117\}$, **(1p)**

relaţia din enunţ devine: $11a+2b=n^2$ cu $n=\overline{4,10}$. **(1p)**

Considerăm toate valorile lui $a\in\{1,2,\ldots,9\}$ și obţinem soluţiile:

$a=1, b=7$; $a=2, b=7$; $a=3$, $b=8$; $a=7, b=2$; $a=8, b=6$. **(5p)**

4. a) Deoarece

$2018^{n+1}+2018^n=2018^n\cdot(2018+1)=2018^n\cdot 2019 \vdots 2018\cdot 2019, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (1),

iar

$2019^{n+1}-2019^n=2019^n\cdot(2019-1)=2019^n\cdot 2018 \vdots 2018\cdot 2019, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (2).

Dinn (1) și (2) deducem:

$(2018^{n+1}+2019^{n+1}+2018^n-2019^n) \vdots 2018\cdot 2019, \forall n\in\mathbb{N}^*$. **(3p)**

b) Dacă p este un număr prim mai mare ca 2, atunci $p=4k+1$ sau $p=4k+3$. Notăm cu $u(n)$ ultima cifră a lui n. **(1p)**

Pentru $p=4k+1$ avem:

$u(1^p+2^p+3^p+4^p+5^p+6^p+7^p+8^p++9^p+10^p)=u(1+2+3+4+5+6+7+8+9+0)=5$

, iar pentru $p=4k+3$ avem $u(1^p+2^p++3^p+4^p+5^p+6^p+7^p+8^p+\ 9^p+10^p)==u(1+8+7+4+5+6+3++2+9+0)=5$. **(1p)**

Aşadar, pentru orice p număr prim, dacă grupăm termenii câte 10, obţinem ultima cifră 5. În suma noastră putem forma 201 grupe de câte 10 termeni şi mai rămân 6 termeni:

$2011^p + 2012^p + 2013^p + 2014^p + 2015^p + 2016^p + 5 \cdot (2017^p + 2018^p)$, apoi scădem

1. **(1p)**

Vom avea $u(A) = u(210 \cdot 5 + 1^p + 2^p + 3^p + 4^p + 5^p + 6^p + 5 \cdot (7^p + 8^p) - 1) = 5$.

Prin urmare A se divide cu 5. **(1p)**