

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019

CLASA a VI -a

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.**

- Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = \overline{abab}, x : 15\}$ și $B = \{x \mid x = \overline{mnmn}, x : 6\}$
 - Determinați elementele mulțimii A;
 - Calculați $A \cap B$.
- Aflați numerele naturale a, b, n știind că $\frac{a}{n} = \frac{b}{n+1} = p$ cu $p \in \mathbb{N}$ și $a+b = 2020$.
 - Arătați că dacă numerele a, b, c sunt direct proporționale cu trei numere naturale consecutive, atunci \overline{abc} este divizibil cu 3.
- Se consideră unghiurile AOB, BOC și BOD astfel încât $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente suplementare, iar $\angle AOB$ și $\angle BOD$ sunt neadiacente complementare. Dacă $\angle COD = 135^\circ$, determinați măsura unghiului AOB.
- Un număr \overline{abc} se numește n-fidel dacă $a+b+c = n$ și $\overline{abc} : n$.
Arătați că mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{există cel puțin un număr n-fidel}\}$ conține cel mult 23 de elemente.



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019**

CLASA a VI-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor ***

Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = \overline{abab}, x:15\}$ și $B = \{x \mid x = \overline{mnmn}, x:6\}$.

- Determinați elementele mulțimii A;
- Calculați $A \cap B$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $15 \mid \overline{abab} \Leftrightarrow 3 \mid \overline{abab}$ și $5 \mid \overline{abab}$.	1p
$5 \mid \overline{abab} \Rightarrow b \in \{0;5\}$ și $3 \mid \overline{abab} \Rightarrow 3 \mid 2a + 2b$	1p
Pentru $b=0 \Rightarrow a \in \{3;6;9\}$ iar pentru $b=5 \Rightarrow a \in \{1;4;7\}$ $\Rightarrow A = \{3030; 6060; 9090; 1515; 4545; 7575\}$	2p
b) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x = \overline{abab}$ și $x: [15;6]$	1p
$\Rightarrow x:30 \Rightarrow x:10$ și $x:3$	1p
$\Rightarrow x \in \{3030; 6060; 9090\}$	1p

Enunț subiect 2, autor***

a) Aflați numerele naturale a, b, n știind că $\frac{a}{n} = \frac{b}{n+1} = p$ cu $p \in \mathbb{N}$ și $a+b = 2020$.

b) Arătați că dacă numerele a, b, c sunt direct proporționale cu trei numere naturale consecutive, atunci \overline{abc} este divizibil cu 3.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $a = np$ și $b = (n+1)p \Rightarrow np + (n+1)p = 2020$	1p
$\Rightarrow p(n+n+1) = 2020 \Rightarrow p(2n+1) = 2020$	1p
$2n+1$ impar $\Rightarrow 2n+1 \in \{5; 101; 505\} \Rightarrow n \in \{2; 50; 252\} \Rightarrow p \in \{404; 20; 4\}$	1p
$(a;b) \in \{(808; 1212); (1000; 1020); (1008; 1012)\}$	1p
b) Fie $k; k+1; k+2$ cele trei numere consecutive $\Rightarrow \frac{a}{k} = \frac{b}{k+1} = \frac{c}{k+2}$	1p
$\Rightarrow \frac{a}{k} = \frac{b}{k+1} = \frac{c}{k+2} = \frac{a+b+c}{3k+3}$	
$\Rightarrow \frac{b}{k+1} = \frac{a+b+c}{3k+3} \Rightarrow b \cdot (3k+3) = (k+1)(a+b+c)$	1p
$\Rightarrow b \cdot 3(k+1) = (k+1)(a+b+c) \Rightarrow 3b = a+b+c \Rightarrow 3 \mid a+b+c \Rightarrow 3 \mid \overline{abc}$	1p

Enunț subiect 3, autor Traian Preda GM nr 11 / 2018

Se consideră unghiurile AOB, BOC și BOD astfel încât $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente suplementare, iar $\angle AOB$ și $\angle BOD$ sunt neadiacente complementare. Dacă $\angle COD=135^\circ$, determinați măsura unghiului AOB.

Detalii rezolvare	Barem asociat
1. $A \in \text{Int BOD}; \angle AOD = 180^\circ - \angle DOC \Rightarrow \angle AOD = 45^\circ$	1p
Dar $\angle AOB + \angle BOD = 90^\circ \Rightarrow$	1p
$\angle AOB + 45^\circ + \angle BOA = 90^\circ \Rightarrow 2 \angle AOB = 45^\circ$	1p
$\angle AOB = 44^\circ 60' : 2 = 22^\circ 30'$	1p
2. $D \in \text{Int BOA}, \angle AOD = 180^\circ - \angle DOC \Rightarrow \angle AOD = 45^\circ$	1p
Dar $\angle AOB + \angle BOD = 90^\circ$	1p
și $\angle AOB - \angle BOD = 45^\circ \Rightarrow 2 \angle AOB = 135^\circ \Rightarrow \angle AOB = 67^\circ 30'$	

Enunț subiect 4, autor Bogdan Georgescu

Un număr \overline{abc} se numește n-fidel dacă $a+b+c = n$ și $\overline{abc} : n$.

Arătați că mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{există cel puțin un număr n-fidel}\}$ conține cel mult 23 de elemente.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Cum a, b, c sunt cifre și $a \neq 0 \Rightarrow A \subset \{1, 2, 3, \dots, 27\} \Rightarrow \text{card}(A) \leq 27$	1p
Vom găsi 4 valori ale lui $n \in \{1, 2, 3, \dots, 27\}$ pentru care nu există numere n – fidele. Dacă \overline{abc} este 20 – fidel $\Rightarrow \overline{abc} : 20 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow 20 = a + b + 0 \leq 18$ contradicție $\Rightarrow 20 \notin A$	1p
Dacă \overline{abc} este 25 – fidel $\Rightarrow \overline{abc} : 25 \Rightarrow c \in \{0, 5\} \Rightarrow 25 = a + b + c \leq 23$ contradicție $\Rightarrow 25 \notin A$	2p
Dacă \overline{abc} este 26 – fidel $\Rightarrow a + b + c = 26 \Rightarrow \overline{abc} \in \{899, 989, 998\}$, dar nici unul dintre cele trei numere nu este divizibil cu 26 contradicție $\Rightarrow 26 \notin A$	1p
Dacă \overline{abc} este 22 – fidel $\Rightarrow \overline{abc} : 11 \Rightarrow a + c = b$ sau $a + c = b + 11$ Dacă $a + c = b \Rightarrow 22 = a + b + c = 2b \Rightarrow b = 11$ contradicție!	1p
Dacă $a + c = b + 11 \Rightarrow 22 = a + b + c = 2b + 11 \Rightarrow 2b = 11$ contradicție $\Rightarrow 22 \notin A$	1p