Teză semestrul I clasa a 12-a,28.11.2019
MATEMATICĂ –*matematică-informatică*
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I

1.	$\Leftrightarrow$ "$\circ$"comutativa $\Leftrightarrow x\circ y = y\circ x, \forall x,y\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x\circ y = xy+mx+15y+1 \\ y\circ x = yx+my+15x+1\end{cases} \Rightarrow mx+15y = my+15x, \forall x,y\in\mathbb{R}$ $(m-15)(x-y)=0, \forall x,y\in\mathbb{R}\left(\text{si pt}.\,x\neq y\right)\Rightarrow m-15=0\Rightarrow m=15$	**1p** **2p** **2p**
2.	$x*1=\dfrac{4(x+1)}{4+x}\Rightarrow$ ecuația devine $\dfrac{4(x+1)}{4+x}=1\Leftrightarrow 4x+4=4+x\Rightarrow 3x=0$ **Finalizare :** $x=0$	**1p** **3p** **1p**
3.	$x\in\mathbb{Z}_6=\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\right\}$ dintre care $\hat{0},\hat{2},\hat{3},\hat{5}$ verifică ecuația $\hat{1},\hat{4}$ nu verifică ecuația **Finalizare :** $x\in\left\{\hat{0},\hat{2},\hat{3},\hat{5}\right\}$	**2p** **2p** **1p**
4. a)	Facand schimbarea de variabil*ă* $\sin x = t\Rightarrow \cos x dx = dt$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2019}\cos x dx=\int_0^1 t^{2019}dt=\dfrac{t^{2020}}{2020}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2020}$	**2p** **3p**
4. b)	$\int_0^1\dfrac{x+1}{e^x}dx=\int_0^1(x+1)\left(-e^{-x}\right)'dx=-(x+1)e^{-x}\Big\vert_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=$ $=-\left(2e^{-1}-1\right)-e^{-x}\Big\vert_0^1=-\dfrac{2}{e}+1-\left(\dfrac{1}{e}-1\right)=\dfrac{2e-3}{e}$	**3p** **2p**
4. c)	$\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\arcsin\dfrac{x}{2}\Big\vert_0^1=\arcsin\dfrac{1}{2}-\arcsin 0=$ $=\dfrac{\pi}{6}-0=\dfrac{\pi}{6}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea

1.	**a)**	$(x-5)(y-5)+5=xy-5x-5y+25+5=$ $=xy-5x-5y+30=x\circ y, \forall x,y\in\mathbb{Q}$	**3p** **2p**

	b)	f izomorfism $\Leftrightarrow$ 1) f morfism si 2) f bijectiva 1) $f(xy) = f(x)\circ f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$ $f(xy) = xy - 5$ $f(x)\circ f(y) = (f(x)-5)(f(y)-5)+5 = (x+5-5)(y+5-5)+5 = xy-5 = f(xy)$ 2)f injectivă $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, cu $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_1 + \cancel{5} = x_2 + \cancel{5} \to x_1 = x_2$ f surjectivă $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Q}, \exists x \in \mathbb{Q}$, astfel încât $f(x) = y$ $pt. \forall y \in \mathbb{Q}, x+5 = y \to \exists x = y-5 \in \mathbb{Q}, f(x) = f(y-5) = y$	1p 2p 1p 1p
	c)	$\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 2020 ori}} = (x-5)^{2020} + 5$ Ecuația devine $(x-5)^{2020} + 5 = 6 \Leftrightarrow (x-5)^{2020} = 1 \Rightarrow x-5 = 1$ sau $x-5 = -1$ $\Rightarrow x \in \{4, 6\}, 4, 6 \in \mathbb{Q}.$	2p 2p 1p
2.	a)	Pentru $a = 2 \in \mathbb{Z}$ si $b = 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $a^2 - 3b^2 = \det A = 1$, deci $A \in G$.	3p 2p
	b)	Fie matricele A= $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$ și B= $\begin{pmatrix} m & 3n \\ n & m \end{pmatrix}$ cu a,b,m,n $\in \mathbb{Z}$ și $a^2 - 3b^2 = \det A = 1, m^2 - 3n^2 = \det B = 1$ Prin calcul se obține că AB = $\begin{pmatrix} am+3bn & 3(an+bm) \\ an+bm & am+3bn \end{pmatrix}$ cu $am + 3bn$ și $an + bm \in \mathbb{Z}$ det (AB) = detA·detB =1. Obținem astfel, că $AB \in G$.	1p 3p 1p
	c)	$\forall A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \in G, \det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A$ inversabilă $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & 3(-b) \\ (-b) & a \end{pmatrix}, a, (-b) \in \mathbb{Z}$ $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1$, deci $A^{-1} \in G$.	1p 3p 1p

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	F este o primitivă a funcției f $\Leftrightarrow$ F derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in (0,\infty)$ F este o funcție derivabilă (operații cu funcții elementare) Se calculează derivata funcţiei F şi se obţine că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (0,\infty)$.	1p 1p 3p
	b)	G este crescătoare pe $[1,\infty)$ daca $G'(x) = f(x) \geq 0, \forall x \in [1,\infty) \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in [1,\infty)$ Cum $x \geq 1 \Rightarrow \ln x \geq 0, \sqrt{x} > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \forall x \in [1,\infty) \Rightarrow G$ crescatoare pe $[1,\infty)$.	3p 2p
	c)	Din punctul a) $F'(x) = f(x)$ Atunci, $\int_1^e f(x)dx. = \int_1^e F'(x)dx = F(x)\Big\vert_1^e =$ $= 2\sqrt{e}(1-2) - 2\cdot(-2) = 4 - 2\sqrt{e}.$	1p 3p 1p
2.	a)	$I_{2018} + I_{2019} + I_{2020} = \int_0^1 \frac{x^{2018}}{x^2+x+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2019}}{x^2+x+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2020}}{x^2+x+1}dx =$	1p

		$=\int_0^1 \frac{x^{2018}+x^{2019}+x^{2020}}{x^2+x+1}dx=\int_0^1 \frac{x^{2018}\cancel{\left(x^2+x+1\right)}}{\cancel{x^2+x+1}}dx=$ $=\frac{x^{2019}}{2019}\Big\|_0^1=\frac{1}{2019}.$	**3p** **1p**
	b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}dx\le 0, \forall x\in[0,1]\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ pt. că $x^n\ge 0, x-1\le 0, x^2+x+1<0\,(\Delta<0)\Rightarrow (I_n)_{n\ge 1}$ descrescător. $0\le I_n\le I_1=\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}dx<\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}\Rightarrow (I_n)_{n\ge 1}$ mărginit.	**2p** **1p** **2p**
	c)	$x^n\ge 0$ si $x^2+x+1\ge 1, \forall x\in[0,1]\Rightarrow 0\le \frac{x^n}{x^2+x+1}\le \frac{x^n}{1}\ \forall x\in[0,1]$ și integând obținem: $0\le I_n\le \frac{1}{n+1}\ \forall x\in[0,1]\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ Trecând la limită,se obţine , folosind criteriul cleștelui $0\le \lim_{n\to\infty} I_n\le 0\Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n=0$	**3p** **1p** **1p**

TEZĂ CU SUBIECT UNIC –CLASA A 12-a MATEMATICĂ – INFORMATICĂ ***Semestrul I 2019-2020***

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1**. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție "$\circ$"s ă fie comutativă pe $\mathbb{R}$, unde $x \circ y = xy + mx + 15y + 1$.

5p **2**. Pe mulțimea $G = (-2, 2)$ se consideră legea $x * y = \dfrac{4(x+y)}{4+xy}, \forall x, y \in G$. Rezolvați în G ecuația $x * 1 = 1$.

5p **3**.Să se rezolve ecuația ecuația $x^2 + x = \hat{0}$ în grupul $(\mathbb{Z}_6, +)$.

4. Să se calculeze următoarele integrale:

5p **a)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2019} \cos x \, dx$;

5p **b)** $\int_0^1 \frac{x+1}{e^x} dx$;

5p **c)** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Pe mulțimea numerelor raționale se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30, \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

5p **a)** Demonstrați că $x \circ y = (x-5)(y-5) + 5, \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

5p **b)** Știind că $(\mathbb{Q}, \circ)$ este grup abelian, arătați că $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, f(x) = x + 5$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{Q}, \cdot)$ la $(\mathbb{Q}, \circ)$.

5p **c)** Rezolvați ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 2020 ori}} = 6$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \ si \ a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$ și operația de înmulțire a matricelor.

5p **a)** Arătați că matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in G$.

5p **b)** Demonstrați că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

5p **c)** Demonstrați că toate elementele mulțimii G sunt inversabile și că $A^{-1} \in G, \forall A \in G$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p **a)**. Să se arate că funcţia $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}, F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$, este o primitivă a funcţiei f.

5p **b)**. Să se arate că orice primitivă G a funcţiei f este crescătoare pe $[1, \infty)$.

5p **c)**. Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

2. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + x + 1} dx, n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Calculați $I_{2018} + I_{2019} + I_{2020}$.

5p **b)** Arătați că șirul $(I_n)_{n \ge 1}$ este monoton și mărginit.

5p **c)** Calculați $\lim_{n \to \infty} I_n$.