

**TEZA CU SUBIECT UNIC**  
**An școlar 2019-2020 semestrul I**  
**Matematică tehnologică**  
**28.11.2019 - Clasa a XII-a**

**Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.**

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**Subiectul I (30 p)**

**(5p)** 1. Calculați  $\hat{2} \cdot (\hat{1} + \hat{4}) + \hat{3}$  în  $\mathbf{Z}_6$ .

**(5p)** 2. Pe  $\mathbf{Z}$  definim operația  $x * y = x + y + 5$ . Calculați  $2 * (-7)$ .

**(5p)** 3. Verificați dacă legea de compoziție  $x \circ y = xy + x + y$  este comutativă pe  $\mathbf{R}$ .

**(5p)** 4. Calculați  $\int \frac{1}{x^2-9} dx, x > 3$ .

**(5p)** 5. Să se determine primitiva funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$  care se anulează în  $x=2$ .

**(5p)** 6. Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 - x, g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$ . Să se arate că  $g$  este o primitivă a lui  $f$  pe  $\mathbb{R}$ .

**Subiectul II (30p)**

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  
 $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$ .

**(5p)** a) Arătați că  $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4, \forall x, y \in \mathbf{R}$ .

**(5p)** b) Determinați elementul neutru al legii " $\circ$ ".

**(5p)** c) Rezolvați în  $\mathbf{R}$  ecuația  $x \circ x = 12$ .

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = x + y + 3$ .

**(5p)** a) Să se arate că legea este asociativă.

**(5p)** b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $x^2 * (x + 1) = 6$ .

**(5p)** c) Calculați  $1*2*3*...*10$ .

**Subiectul III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 1 \\ x^2 + x + 1, & x < 1 \end{cases}$ .

**(5p) a)** Să se arate că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbf{R}$ .

**(5p) b)** Pentru  $x \geq 1$ , să se determine primitiva  $F, F: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  a funcției  $f$ , care verifică  $F(2) = 7$ .

**(5p) c)** Calculați  $\int_0^2 (f(x)) dx$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, F: (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x^2 + 1 + \frac{1}{x}$  și  $F(x) = x^3 + x + \ln x - 2$ .

**(5p) a)** Arătați că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .

**(5p) b)** Calculați  $\int_1^2 (f(x)) dx$ .

**(5p) c)** Calculați  $\int \left( f(x) - \frac{1}{x} \right) e^x dx$ .

**Barem de rezolvare -Teza semestrul I-Matematică tehnologic**

**An școlar 2019-2020 -Clasa a XII-a**

**Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.SUBIECTUL I (30 p)**

<b>Subiectul I (30p)</b>		
<b>1</b>	$\hat{2} \cdot (\hat{1} + \hat{4}) + \hat{3} = \hat{2} \cdot \hat{5} + \hat{3}$	<b>2p</b>
	rezultat final $\hat{1}$	<b>3p</b>
<b>2</b>	$2 * (-7) = 2+(-7)+5$	<b>2p</b>
	rezultat final 3	<b>3p</b>
<b>3</b>	$x \circ y = xy + x + y$ și $y \circ x = yx + y + x$	<b>2p</b>
	$x + y = y + x$ și $x \cdot y = y \cdot x, (\forall)x, y \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
	deci $x \circ y = y \circ x, (\forall)x, y \in \mathbb{R}$	<b>1p</b>
<b>4</b>	$\int \frac{1}{x^2-9} dx = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left  \frac{x-3}{x+3} \right  + C$	<b>3p</b>
	Cum $x > 3$ rezultă $\frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3} + C$	<b>2p</b>
<b>5</b>	$F(x) = \frac{x^3}{3} - x + C, x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
	$F(2) = 0 \Rightarrow C = -\frac{2}{3}$	<b>2p</b>
	$F(x) = \frac{x^3}{3} - x - \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}$	<b>1p</b>
<b>6</b>	$g$ primitiva lui $f$ dacă $g$ derivabilă	<b>1p</b>
	și $g'(x) = f(x), (\forall)x \in \mathbb{R}$	<b>1p</b>
	$g'(x) = -x + 2 = f(x), (\forall)x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b>

<b>Subiectul II (30p)</b>		
<b>1a</b>	$x \circ y = x(y + 4) + 4(y + 4) - 4$	<b>2p</b>
	$=xy + 4x + 4y + 16 - 4 = xy + 4x + 4y + 12, (\forall)x, y \in \mathbb{R}$	<b>3p</b>
<b>1b</b>	$e \in \mathbb{R}$ este element neutru al legii dacă $x \circ e = e \circ x = x, (\forall)x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>
	legea este comutativă, deci $x \circ e = e \circ x, (\forall)x \in \mathbb{R}$	<b>1p</b>
	de unde rezultă că $e=-3$	<b>2p</b>
<b>1c</b>	$x \circ x = (x + 4)^2 - 4 = 12$	<b>2p</b>
	$(x + 4)^2 = 16$	<b>1p</b>



	soluțiile sunt $x_1 = 0$ și $x_2 = -8$	2p
2a	legea este asociativă dacă $(x * y) * z = x * (y * z)$ , $(\forall)x, y, z \in \mathbb{R}$	1p
	$(x * y) * z = (x + y + 3) * z = x + y + z + 6$	2p
	$x * (y * z) = x * (y + z + 3) = x + y + z + 6$	2p
2b	$x^2 * (x + 1) = x^2 + x + 4$	2p
	$x^2 + x + 4 = 6 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$	1p
	cu soluțiile $x_1 = -2$ și $x_2 = 1$	2p
2c	$1 * 2 * 3 * \dots * 10 = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 3 \cdot 9$	3p
	$= \frac{10 \cdot 11}{2} + 27 = 82$	2p

**Subiectul III (30p)**

1a	f admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$ f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , punct în care se va studia continuitatea	1p
	$l_s(1) = 3$ ; $l_d(1) = 3$ ; $f(1) = 3$ , deci f este continuă în 1	3p
	$\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}$ , deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$	1p
1b	$F(x) = x^2 + x + C$ , pentru $x \geq 1$	2p
	$F(2) = 7 \Rightarrow C = 1$	2p
	$F(x) = x^2 + x + 1$ , pentru $x \geq 1$	1p
1c	$\int_0^2 (f(x)) dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1) dx + \int_1^2 (2x + 1) dx$	2p
	$= \frac{x^3}{3} \Big _0^1 + \frac{x^2}{2} \Big _0^1 + x \Big _0^1 + x^2 \Big _1^2 + x \Big _1^2$	2p
	$= \frac{35}{6}$	1p
2a	F primitiva lui f dacă F derivabilă și $F'(x) = f(x)$ , $(\forall)x \in (0; \infty)$	1p
	$F'(x) = (x^3)' + (x)' + (\ln x)'$	1p
	$= 3x^2 + 1 + \frac{1}{x}$ , $(\forall)x \in (0; \infty)$	2p
	$= f(x)$ , $(\forall)x \in (0; \infty)$ , deci F este primitiva lui f pe $(0; \infty)$	1p
2b	$\int_1^2 (f(x)) dx = \int_1^2 \left( 3x^2 + 1 + \frac{1}{x} \right) dx$	2p
	$= x^3 \Big _1^2 + x \Big _1^2 + \ln x  \Big _1^2$	2p
	$= 8 + \ln 2$	1p
2c	$\int \left( f(x) - \frac{1}{x} \right) e^x dx = \int (3x^2 + 1) e^x dx$	2p
	Se calculează prin părți și se obține $(3x^2 - 6x + 7)e^x + C$	3p