OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 2 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE-CLASA a X-a

1. (3p) a) Se consideră ecuația $az^2+bz+c=0$, cu $a,b,c\in\mathbb{C}^*$, astfel încât $|b|\geq 2|c|$. Să se arate că ecuația dată are cel puțin o rădăcină în modul mai mică sau egală cu 1.
(4p) b) Fie $1,\varepsilon,\varepsilon^2$ rădăcinile cubice ale unității. Să se determine $z\in\mathbb{C}$, știind că:

$$\max\left\{|z-1|,|z-\varepsilon|,\left|z-\varepsilon^2\right|\right\}\leq 1$$

***

Soluție. a) Presupunem, prin reducere la absurd, că $|z_1|,|z_2|>1$, unde z_1,z_2 sunt rădăcinile ecuației date. Din relațiile lui Viete avem $|z_1+z_2|=\frac{|b|}{|a|},|z_1\cdot z_2|=\frac{|c|}{|a|}$, de unde obținem

$\left|\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}\right|=\left|\frac{b}{c}\right|\geq 2\Leftrightarrow\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right|\geq 2$.

Dar $\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right|\leq\left|\frac{1}{z_1}\right|+\left|\frac{1}{z_2}\right|<1+1=2$, contradicție.

b) Avem: $|z-1|\leq 1\Leftrightarrow(z-1)(\bar{z}-1)\leq 1\Leftrightarrow|z|^2\leq z+\bar{z}$ (1)

$|z-\varepsilon|\leq 1\Leftrightarrow(z-\varepsilon)(\bar{z}-\bar{\varepsilon})\leq 1\Leftrightarrow|z|^2\leq z\bar{\varepsilon}+\bar{z}\varepsilon$ (2)

$\left|z-\varepsilon^2\right|\leq 1\Leftrightarrow\left(z-\varepsilon^2\right)\left(\bar{z}-\overline{\varepsilon^2}\right)\leq 1\Leftrightarrow|z|^2\leq z\overline{\varepsilon^2}+\bar{z}\varepsilon^2$ (3)

Adunăm relațiile (1), (2), (3) și ținând cont că $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$, obținem $3|z|^2\leq 0\Rightarrow z=0$.

Barem.

a) Scrie relațiile lui Viete..	1p
Aplică raționamentul prin reducere la absurd...	2p
b) Se acordă câte 1p pentru fiecare relație și 1p pentru finalizare	4p

2. (7p) Fie $a,b,c\in(1,+\infty)$. Să se arate că:

$$\frac{1}{\log_a b+\log_b c}+\frac{1}{\log_b c+\log_c a}+\frac{1}{\log_c a+\log_a b}\leq\frac{(\log_a b)^2+(\log_b c)^2+(\log_c a)^2}{2}$$

Supliment G.M.2/2019

Soluție. $a,b,c\in(1,+\infty)\Rightarrow\log_a b,\log_b c,\log_c a\in(0,+\infty)$. Notăm $\log_a b=x,\log_b c=y,\log_c a=z$ și inegalitatea din enunț este echivalentă cu: $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\leq\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$, cu $x,y,z>0,xyz=1$.

Avem: $\frac{1}{x+y}=\frac{z}{xz+yz}=\frac{z}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=\frac{z}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}\leq\frac{z}{2}\cdot\frac{x+y}{2}=\frac{zx+zy}{4}$. Obținem astfel:

$\sum_{cyc}\frac{1}{x+y}\leq\sum_{cyc}\frac{zx+zy}{4}=\frac{xy+yz+zx}{2}\leq\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Barem.

Rescrie inegalitatea în forma $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\leq\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$, cu $x,y,z>0,xyz=1$	2p
Demonstrează $\frac{1}{x+y}\leq\frac{zx+zy}{4}$	3p

Finalizare $\sum_{cyc}\frac{1}{x+y}\le\sum_{cyc}\frac{zx+zy}{4}=\frac{xy+yz+zx}{2}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$	2p

3. (7p) Să se rezolve ecuația $2^{\sin x}+2^{\cos^2\frac{x}{2}}=3, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Dan Popescu, Suceava

<u>Soluție.</u> Aplicăm inegalitatea mediilor și obținem:

$2^{\sin x}+2^{\cos^2\frac{x}{2}}=2^{\sin x}+2\cdot 2^{\cos^2\frac{x}{2}-1}\ge 3\sqrt[3]{2^{\sin x+2\cos^2\frac{x}{2}-2}}=3\sqrt[3]{2^{\sin x+\cos x-1}}$.

Deoarece $\sin x\ge\sin^2 x$ şi $\cos x\ge\cos^2 x$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $3\sqrt[3]{2^{\sin x+\cos x-1}}\ge 3\sqrt[3]{2^{\sin^2 x+\cos^2 x-1}}=3$.

Egalitatea având loc doar pentru $x=0$, care este singura soluţie a ecuaţiei.

<u>Barem.</u>

Demonstrează $2^{\sin x}+2^{\cos^2\frac{x}{2}}\ge 3\sqrt[3]{2^{\sin x+\cos x-1}}$	4p
Deduce că $3\sqrt[3]{2^{\sin x+\cos x-1}}\ge 3$ și determină soluția ecuației	3p

4. Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f\left(x^2+f\left(y\right)\right)=xf\left(x\right)+y,\forall x,y\in\mathbb{R}$.

(2p) a) Să se arate că *f* este funcție bijectivă;

(5p) b) Să se determine funcțiile care verifică relația din enunț.

***

Soluție: a) Considerăm $x=0$ și obținem $f\left(f\left(y\right)\right)=y,\forall y\in\mathbb{R}$, deci $f\circ f=1_{\mathbb{R}}$. De aici rezultă că *f* este bijecție, inversabilă și $f=f^{-1}$.

b) Fie $t\in\mathbb{R}$ un număr real oarecare și $x=f^{-1}\left(t\right)$, adică $t=f\left(x\right)$. Înlocuim în relația din ipoteză și obținem

$f\left(f\left(t\right)^2+f\left(y\right)\right)=tf\left(t\right)+y$. Dar $f\left(t^2+f\left(y\right)\right)=tf\left(t\right)+y$ și din injectivitatea funcției *f*, deducem că

$f\left(t\right)^2+f\left(y\right)=t^2+f\left(y\right)\Leftrightarrow\left|f\left(t\right)\right|=\left|t\right|$. Rezultă $f\left(t\right)=\begin{cases}t, t\in A\\ -t, t\in B\end{cases}$, unde A,B formează o partiție a mulțimii $\mathbb{R}$. Considerăm două elemente oarecare $x\in A, y\in B$ în relația din ipoteză și obținem $f\left(x^2-y\right)=x^2+y\Rightarrow x^2-y=x^2+y$ sau $-x^2+y=x^2+y$, de unde $x=0$ sau $y=0$, adică $A=\{0\}$ sau $B=\{0\}$. Rezultă $f\left(x\right)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{R}^*\\ 0, x=0\end{cases}$ sau $f\left(x\right)=\begin{cases}-x, x\in\mathbb{R}^*\\ 0, x=0\end{cases}$, deci $f=1_{\mathbb{R}}$ sau $f=-1_{\mathbb{R}}$, care verifică relația dată.

<u>Barem.</u>

a) Demonstrează că *f* este bijecție..	2p
b) Deduce $\left|f\left(t\right)\right|=\left|t\right|,\forall t\in\mathbb{R}$	3p
Finalizare $f=1_{\mathbb{R}}$ și $f=-1_{\mathbb{R}}$ sunt singurele funcții..	2p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.