OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 2 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a XI-a

1. (7p) Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = B^2 = O_n$. Demonstrați că

$$\det(A+B)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(ABA+BAB)=0.$$

Dumitru Crăciun

Soluție.

Avem $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = AB + BA$ și

$(A+B)^3 = (A+B)^2(A+B) = (AB+BA)(A+B) = ABA + AB^2 + BA^2 + BAB = ABA + BAB$.

Trecând la determinanți obținem $(\det(A+B))^3 = \det(ABA+BAB)$. Din această egalitate se obține că $\det(A+B)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(ABA+BAB)=0$.

Barem.

$(A+B)^2 = AB+BA$	2 p
$(A+B)^3 = (A+B)^2(A+B) = ABA+BAB$	2 p
Finalizare	3 p

2. Fie G mulțimea matricelor pătratice de ordinul 3 care au elementele egale cu -1 sau 1.

a) (2p) Câte elemente are mulțimea G ?

b) (5p) Determinați mulțimea $\{\det(A) \ / \ A \in G\}$.

Mihai Piticari

Soluție.

a) O matrice din mulțimea G are 9 elemente, fiecare dintre acestea putând lua două valori (-1 sau 1). Mulțimea G are $2^9 = 512$ elemente.

b) Fie $A \in G$. Din definiția unui determinant de ordinul 3 obținem că

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)},$$

adică $\det(A)$ este o sumă cu 6 termeni egali cu ± 1; rezultă că $-6 \le \det(A) \le 6$.

Adunând linia 1 la liniile 2 și 3 obținem $\det(A) = \det(B)$, unde B este o matrice care are pe prima linie -1 sau 1, iar pe liniile a doua și a treia are 0, -2 sau 2. Scoatem factorul comun 2 de pe liniile a doua și a treia și atunci $\det(A) = 4\det(C)$, unde C este o matrice care are pe prima linie -1 sau 1, iar pe liniile a doua și a treia are 0, -1 sau 1. Cum $\det(C) \in \mathbb{Z}$ deducem că 4 divide $\det(A)$, prin urmare $\det(A) \in \{-4, 0, 4\}$.

Fie $A_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ și $A_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Evident $A_1,\ A_2,\ -A_2\in G$ și $\det(A_1)=0$, $\det(A_2)=4$, $\det(-A_2)=-4$. În concluzie, $\{\det(A)\ /\ A\in G\}=\{-4,\ 0,\ 4\}$.

Barem.

a) $\operatorname{card}(G)=2^9=512$	2 p
b) $A\in G\ \Rightarrow\ -6\le\det(A)\le 6$	1 p
$A\in G\ \Rightarrow\ \det(A)\in\{-4,\ 0,\ 4\}$	2 p
Finalizare	2 p

3. Se consideră șirul $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+4k}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) (3p) Să se demonstreze că $\lim_{n\to+\infty}x_n=1$.

b) (4p) Să se calculeze $\lim_{n\to+\infty}x_n{}^n$.

Dan Popescu

Soluție. **a)** Avem $\frac{1}{\sqrt{n^2+4n+4}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+4k}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2}}$, $\forall k\in\{1,2,\ \dots\ ,n\}$. Sumând aceste *n* relații obținem $\frac{n}{n+2}\le x_n\le 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Din teorema cleștelui rezultă $\lim_{n\to+\infty}x_n=1$.

b) Ținând cont de punctul a), limita cerută se plasează în cazul ”1^∞” și atunci $\lim_{n\to+\infty}x_n{}^n=e^{\lim_{n\to\infty}y_n}$,

unde $y_n=n(x_n-1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+4k}}-1\right)=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{-4k}{\left(n+\sqrt{n^2+4k}\right)\sqrt{n^2+4k}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Avem $\frac{4k}{\left(n+\sqrt{n^2+4n+4}\right)\sqrt{n^2+4n+4}}<\frac{4k}{\left(n+\sqrt{n^2+4k}\right)\sqrt{n^2+4k}}<\frac{4k}{\left(n+\sqrt{n^2}\right)\sqrt{n^2}}$, $\forall k\in\{1,2,\ \dots\ ,n\}$.

Sumând aceste *n* relații obținem $\frac{2n(n+1)}{(2n+2)(n+2)}<-y_n<\frac{2n(n+1)}{2n\cdot n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ adică

$-\frac{n+1}{n}<y_n<-\frac{n}{n+2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Din teorema cleștelui rezultă $\lim_{n\to+\infty}y_n=-1$, deci $\lim_{n\to+\infty}x_n{}^n=\frac{1}{e}$.

Barem.

a) Obține $\frac{n}{n+2}\le x_n\le 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.	2 p
Finalizare	1 p
b) Avem cazul ”1^∞” și atunci $\lim_{n\to+\infty}x_n{}^n=e^{\lim_{n\to+\infty}y_n}$, unde $y_n=n(x_n-1)$	1 p
Obține $-\frac{n+1}{n}<y_n<-\frac{n}{n+2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$	2 p
Finalizare	1 p

4. Spunem că un șir de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea (P) dacă $(x_{2n})_{n\geq 1}$ este șir crescător și $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ este șir descrescător.

a) (2p) Dați exemplu de un șir cu proprietatea (P) care nu are limită.

b) (5p) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir cu proprietatea (P). Dacă șirul $(x_{3n})_{n\geq 1}$ are limită, demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Vladimir Cerbu

<u>Soluție:</u>

a) De exemplu, șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = (-2)^n$ are proprietatea (P).

Avem $x_{2n} = 2^{2n} \to +\infty$ și $x_{2n-1} = -2^{2n-1} \to -\infty$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită.

b) Cum orice șir monoton are limită și $(x_{2n})_{n\geq 1}$ este șir crescător, rezultă că există $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = l_1$ și $l_1 \geq x_2$. Analog, deoarece $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ este șir descrescător, rezultă că există $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n-1} = l_2$ și $l_2 \leq x_1$.

Fie $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{3n} = l$. Atunci orice subșir al lui $(x_{3n})_{n\geq 1}$ are limita *l*, deci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{6n} = l$ și $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{6n-3} = l$.

Dar $(x_{6n})_{n\geq 1}$ este subșir al șirului $(x_{2n})_{n\geq 1}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{6n} = l_1$. Cum limita unui șir (în caz că există) este unică rezultă că $l_1 = l$. Similar, $(x_{6n-3})_{n\geq 1}$ este subșir al șirului $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{6n-3} = l_2$. Unicitatea limitei conduce la $l_2 = l$, deci $l_1 = l_2 = l$.

Avem $x_{2n} \to l$ și $x_{2n-1} \to l$, deci există $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$. Cum $x_2 \leq l \leq x_1$ rezultă că $l \in \mathbb{R}$ ceea ce înseamnă că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

<u>Barem.</u>

a)	Prezintă și justifică un exemplu	2 p
b)	$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = l_1$ și $l_1 \geq x_2$	1 p
	$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n-1} = l_2$ și $l_2 \leq x_1$.	1 p
	$l_1 = l_2 = l$.	2 p
	Finalizare	1 p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.