BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VIII–a

1. (7p) Notăm $[x]$, partea întreagă a numărului real x. Arătați că $n\in\left(\frac{687}{16},\frac{689}{16}\right)$, unde n este soluția ecuației: $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]+....+\left[\sqrt{n(n+1))}\right]=946,\ n\in\mathbb{N}^*$.

prof. Gabriela Sascău, Rădăuți

Soluție:

Avem inegalitatea: $k^2<k(k+1)<(k+1)^2,\ k\in\mathbb{N}^*$, de unde $k<\sqrt{k(k+1)}<k+1$, deci $\left[\sqrt{k(k+1))}\right]=k$ Ecuația devine**:** $1+2+3+...+n=946$, de unde $n(n+1)=1892$, deci n = 43. Cum $43\cdot 16=688$ avem $\frac{687}{16}<43<\frac{689}{16}\Leftrightarrow 43\in\left(\frac{687}{16},\frac{689}{16}\right)$.

Barem:

$k^2<k(k+1)<(k+1)^2,\ k\in\mathbb{N}^*$, de unde $k<\sqrt{k(k+1)}<k+1$	**2p**
$\left[\sqrt{k(k+1))}\right]=k$	**1p**
$1+2+3+...+n=946$	**1p**
$n(n+1)=1892$	**1p**
n = 43	**1p**
$43\cdot 16=688$ avem $\frac{687}{16}<43<\frac{689}{16}\Leftrightarrow 43\in\left(\frac{687}{16},\frac{689}{16}\right)$	**1p**

2.a) (2p) Arătați că: $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\geq x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$, pentru orice numere reale $x,y\geq 0$.

b) (5p) Arătaţi că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$**,** are loc inegalitatea**:**

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}+3\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Prof. Liliana Timofti, Suceava

Soluție:

a) $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\geq x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)^2\geq\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)^2\Leftrightarrow$ $x^3+y^3-x^2y-y^2x\geq 0\Leftrightarrow(x-y)^2\cdot(x+y)\geq 0$ adevarată, pentru pentru orice numere reale $x,y\geq 0$, cu egalitate pentru $x=y$.

b) Din a), pentru numere diferite, avem: $(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}>(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$. Cum $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}==\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)^2-(n+1)n^2}==\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$, avem: $\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}<\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$, ..., $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$. Prin

adunarea untimelor inegalități obținem:
$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}+3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}, \text{ de unde}$$
$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}+3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Barem:

a) $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\ge x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)^2\ge\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)^2\Leftrightarrow x^3+y^3-x^2y-y^2x\ge0\Leftrightarrow$	**1p**
$(x-y)^2\cdot(x+y)\ge0$ adevarată, pentru pentru orice numere reale $x,y\ge0$, cu egalitate pentru *x=y*.	**1p**
b) Din a), pentru numere diferite, avem: $(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}>(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$	**1p**
$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)^2-(n+1)n^2}==\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$, de unde $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$ (1)	**2p**
Aplic inegaliatea (1): $\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}<\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$, ..., $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$	**1p**
Prin adunare: $\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}+3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.	**1p**

3. Fie punctele necoplanare *T, A, B, C*. Prin centrul de greutate *G* al triunghiului $\triangle ABC$ se construiesc dreptele *a, b, c*, astfel încât $a\parallel TA,\ b\parallel TB,\ c\parallel TC$ și $a\cap(TBC)=\{A'\}$, $b\cap(TAC)=\{B'\}$, $c\cap(TAB)=\{C'\}$.

- **a)** **(4p)** Arătați că $(A'B'C')\parallel(ABC)$.
- **b)** **(3p)** Determinați distanța dintre planele $(A'B'C')$ și (ABC), știind că distanța de la T la planul (ABC) este egală cu 12 cm.

Gazeta Matematică

Soluție:

a) Fie *D, E, F* mijloacele segmentelor *(BC), (AC), (AB)*. Cum $a\parallel TA\Rightarrow a\subset(TAD)$, dar $(TAD)\cap(TBC)=TD$, iar $a\cap(TBC)=\{A'\}$, rezultă că $A'\in TD$. Analog, $B'\in TE, C'\in TF$. În $\triangle TAD, GA'\parallel AT\Rightarrow\frac{TA'}{A'D}=\frac{AG}{GD}$, conform teoremei lui Thales, iar cum *G* este centru de greutate al triunghiului $\triangle ABC$, avem $\frac{AG}{GD}=2\Rightarrow\frac{TA'}{A'D}=2$. Analog $\frac{TB'}{B'E}=2,\frac{TC'}{C'F}=2$. Conform reciprocei teoremei lui Thales în $\triangle TED \Rightarrow A'B' \parallel DE$. Cum $DE \subset (ABC)$, rezultă $A'B' \parallel (ABC)$ (2). Analog, $B'C' \parallel (ABC)$ (3). Din (2) și (3), cum $A'B' \cap B'C' = \{B'\}$, rezultă $(A'B'C') \parallel (ABC)$.

b) Fie $TM \perp (ABC), M \in (ABC)$ și $TM \cap (A'B'C') = \{M'\}$. Cum $(A'B'C') \parallel (ABC) \Rightarrow TM' \perp (A'B'C')$. Planul *(TEM)* intersectează planele paralele $(A'B'C') \parallel (ABC)$ după dreptele paralele $M'B' \parallel ME$ și din teorema lui Thales în $\triangle TME \Rightarrow \frac{TM'}{TM} = \frac{TB'}{TE} = \frac{2}{3}$. Dar *TM=12 cm*, deci, $TM' = 8\,cm$.

Barem:

a) Fie *D, E, F* mijloacele segmentelor *(BC), (AC), (AB)*. Cum $a \parallel TA \Rightarrow a \subset (TAD)$, dar $(TAD) \cap (TBC) = TD$, iar $a \cap (TBC) = \{A'\}$, rezultă că $A' \in TD$. Analog, $B' \in TE, C' \in TF$.	**1p**
În $\triangle TAD, GA' \parallel AT \Rightarrow \frac{TA'}{A'D} = \frac{AG}{GD}$, conform teoremei lui Thales, iar cum *G* este centru de greutate al triunghiului $\triangle ABC$, avem $\frac{AG}{GD} = 2 \Rightarrow \frac{TA'}{A'D} = 2$. Analog $\frac{TB'}{B'E} = 2, \frac{TC'}{C'F} = 2.$	**1p**
Conform reciprocei teoremei lui Thales în $\triangle TED \Rightarrow A'B' \parallel DE$. Cum $DE \subset (ABC)$, rezultă $A'B' \parallel (ABC)$.	**1p**
Analog, $B'C' \parallel (ABC)$ (3). Din (2) și (3), cum $A'B' \cap B'C' = \{B'\}$, rezultă $(A'B'C') \parallel (ABC)$.	**1p**
b) Fie $TM \perp (ABC), M \in (ABC)$ și $TM \cap (A'B'C') = \{M'\}$. Cum $(A'B'C') \parallel (ABC) \Rightarrow TM' \perp (A'B'C')$.	**1p**
Planul *(TEM)* intersectează planele paralele $(A'B'C') \parallel (ABC)$ după dreptele paralele $M'B' \parallel ME$ și din teorema lui Thales în $\triangle TME \Rightarrow \frac{TM'}{TM} = \frac{TB'}{TE} = \frac{2}{3}$.	**1p**
Dar *TM=12 cm*, deci, $TM' = 8\,cm$.	**1p**

4. (7p) În tetraedrul *MABC*, *P* este proiecția punctului *M* pe planul *(ABC)*, $P \in AC$. Dacă punctul *M* este egal depărtat de vârfurile triunghiului $\triangle ABC$, *MA=a*, $m(\sphericalangle BMC) = 60^\circ$ și $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$, să se determine distanța de la punctul *P* la planul *(MBC)*.

prof. Tamara Brutaru, Suceava

Soluție:

Din ipoteză *MB=MC=MA=a* și $m(\sphericalangle BMC) = 60^\circ$, deci $\triangle MBC$ este echilateral, de unde *BC=a* $\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, unde *N* este mijlocul *(BC)*. Cum *P* este proiecția punctului *M* pe planul *(ABC)* $\Rightarrow MP \perp (ABC)$. Deoarece *M* este egal depărtat de vârfurile triunghiului $\triangle ABC$, rezultă că *P* este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$ și cum $P \in AC$, deducem că $\triangle ABC$ este triunghi dreptunghic, $m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ$, *AP=PC*. În $\triangle ABC$ dreptunghic în *B*, $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$, BC=a, avem:

$\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{AC} \Rightarrow AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ și $AB = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $AP = PC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cum *(PN)* este linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow PN = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $PN \parallel AB, iar\ AB \perp BC \Rightarrow PN \perp BC$.

Fie $PS \perp MN, S \in MN$, cum $MN \perp BC, PN \perp BC, MN, BC \subset (MBC)$, din reciproca 2 a teoremei celor trei perpendiculare avem $PS \perp (MBC) \Rightarrow d(P, (MBC)) = PS$.

În $\triangle MAP$ dreptunghic în *P*, din teorema lui Pitagora, $MP = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

În $\triangle MPN$ dreptunghic în *P*, *PS* este înălțime $\Rightarrow PS = \frac{MP \cdot PN}{MN} = \frac{a\sqrt{6}}{9}$.

Barem:

Din ipoteză $MB=MC=MA=a$ și $m(\sphericalangle BMC) = 60^\circ$, deci $\triangle MBC$ este echilateral, de unde $BC=a. \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, unde *N* este mijlocul *(BC)*.	**1p**
P este proiecția punctului *M* pe planul *(ABC)* $\Rightarrow MP \perp (ABC)$. Deoarece *M* este egal depărtat de vârfurile triunghiului $\triangle ABC$, rezultă că *P* este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$ și cum $P \in AC$, deducem că $\triangle ABC$ este triunghi dreptunghic, $m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ$, *AP=PC*.	**1p**
În $\triangle ABC$ dreptunghic în *B*, $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$, BC=a, avem: $\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{AC} \Rightarrow AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ și $AB = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $AP = PC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.	**1p**
(PN) este linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow PN = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $PN \parallel AB$, *iar* $AB \perp BC \Rightarrow PN \perp BC$	**1p**
Fie $PS \perp MN, S \in MN$, cum $MN \perp BC, PN \perp BC, MN, BC \subset (MBC)$, din reciproca 2 a teoremei celor trei perpendiculare avem $PS \perp (MBC) \Rightarrow d(P, (MBC)) = PS$.	**1p**
În $\triangle MAP$ dreptunghic în *P*, din teorema lui Pitagora, $MP = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.	**1p**
În $\triangle MPN$ dreptunghic în *P*, *PS* este înălțime $\Rightarrow PS = \frac{MP \cdot PN}{MN} = \frac{a\sqrt{6}}{9}$.	**1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.