OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 2 februarie 2020
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a IX-a

1. (7p) Dacă $a,b,c\in(0,+\infty)$ şi $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{15}{2}$, să se demonstreze că $\frac{3}{2}\le a+b+c\le 6$.
Când se obțin egalitățile?

Dan Popescu, Suceava

Soluție: Avem inegalitatea: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9,\forall a,b,c\in(0,+\infty)$.

Atunci, notând $a+b+c=x$, rezultă că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{15}{2}-x$ și $x\left(\frac{15}{2}-x\right)\ge 9$, adică $2x^2-15x+18\le 0$,

ceea ce revine la $(2x-3)(x-6)\le 0\Leftrightarrow x\in\left[\frac{3}{2},\ 6\right]$.

Egalitățile se obțin odată cu egalitatea $\frac{a+b+c}{3}=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, adică pentru $a=b=c\in\left\{\frac{1}{2},\ 2\right\}$.

Barem:

Inegalitatea $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$	2p
Demonstrează cerința..	4p
Precizează cazul de egalitate...	1p

2. (4p) a) Să se determine numerele reale pozitive $a_1,a_2,...,a_n,...$, știind că $a_3=3$ și sunt verificate relațiile:

$$a_1^3+\frac{1}{2^2}\cdot a_2^3+...+\frac{1}{n^2}\cdot a_n^3=\frac{a_na_{n+1}}{2},\forall n\in\mathbb{N},n\ge 1.$$

***

(3p) b) Fie $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. Să se calculeze suma:

$$S=\left[\frac{x+1}{x}\right]+\left[\frac{x+2}{x+1}\right]+\left[\frac{x+3}{x+2}\right]+...+\left[\frac{x+2019}{x+2018}\right],$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

Moisuc Niculina Mihaela, Rădăuţi

Soluție. a) $n=1\Rightarrow a_1^3=\frac{a_1a_2}{2}\Leftrightarrow a_2=2a_1^2$ (1)

$n=2\Rightarrow a_1^3+\frac{a_2^3}{4}=\frac{a_2a_3}{2}\underset{(1)}{\Rightarrow} a_1^3+2a_1^6=3a_1^2\Leftrightarrow a_1\left(2a_1^3+1\right)=3$, cu soluția unică $a_1=1$, de unde rezultă $a_2=2$. Presupunem, inductiv, că $a_k=k$, pentru orice număr natural $k\in\{1,2,...,n\}$ și demonstrăm că $a_{n+1}=n+1$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$. Înlocuim în relația din ipoteză și obținem:

$1+2+...+n=\frac{na_{n+1}}{2}\Rightarrow a_{n+1}=n+1$. În concluzie, $a_n=n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Avem: $S=\left[\frac{x+1}{x}\right]+\left[\frac{x+2}{x+1}\right]+\left[\frac{x+3}{x+2}\right]+...+\left[\frac{x+2019}{x+2018}\right]=\left[1+\frac{1}{x}\right]+\left[1+\frac{1}{x+1}\right]+...+\left[1+\frac{1}{x+2018}\right]=$

$=1+\left[\frac{1}{x}\right]+1+\left[\frac{1}{x+1}\right]+1+\left[\frac{1}{x+2}\right]+...+1+\left[\frac{1}{x+2018}\right]$.

Pentru $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$, avem $1\le\frac{1}{x}<2\Rightarrow\left[\frac{1}{x}\right]=1$ și $\left[\frac{1}{x+p}\right]=0,\forall p=\overline{1,2018}\Rightarrow S=2020$.

Pentru $x\in(1,+\infty)\Rightarrow\left[\frac{1}{x}\right]=\left[\frac{1}{x+1}\right]=...=\left[\frac{1}{x+2018}\right]=0\Rightarrow S=2019$.

Barem.

a) Determină a_1, a_2	2p
Demonstrează prin inducție că $a_n = n, \forall n \geq 1$	2p
b) Calculează suma	3p

3. (7p) Fie ABCDE un pentagon convex și punctele $P \in (DE), Q \in (CD)$ astfel încât $\frac{PE}{PD} = \frac{QC}{QD} = 2$.

Dacă M și N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și ABE, să se arate că $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

G. M. 3/2019

Soluție. Pentru orice punct X din plan, notăm cu $\overrightarrow{r_X}$ vectorul său de poziție. Deoarece M și N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv ABE, rezultă:

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}\right) \text{ și } \overrightarrow{r_N} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_E}\right) \ (1)$$

Din $\frac{PE}{PD} = \frac{QC}{QD} = 2$ obținem:

$$\overrightarrow{r_Q} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_C} + 2\overrightarrow{r_D}\right) \text{ și } \overrightarrow{r_P} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_E} + 2\overrightarrow{r_D}\right) \ (2)$$

Din relațiile (1) și (2) deducem: $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{r_Q} - \overrightarrow{r_M} = \frac{1}{3}\left(\cancel{\overrightarrow{r_C}} + 2\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B} - \cancel{\overrightarrow{r_C}}\right) = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}\right)$ și

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_N} = \frac{1}{3}\left(\cancel{\overrightarrow{r_E}} + 2\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B} - \cancel{\overrightarrow{r_E}}\right) = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}\right)$, de unde rezultă concluzia.

Barem.

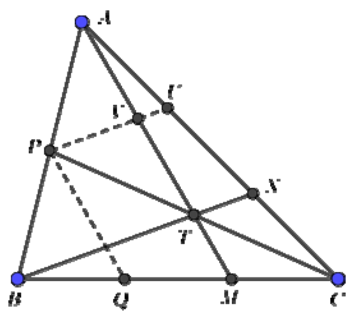
Deduce relațiile (1)	2p
Deduce relațiile (2)..	2p
Exprimă vectorii $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ}$ și finalizare..	3p

4. Se consideră triunghiul *ABC* și punctele $N \in (AC), P \in (AB)$ astfel încât $AP = PB, AN = 2NC$. Fie $\{T\} = BN \cap CP$ și $\{M\} = AT \cap BC$.

a) **(3p)** Arătați că $\frac{TM}{AM} = \frac{TN}{BN} < \frac{TP}{CP}$.

b) **(4p)** Arătați că dacă cercul cu centrul în *T* și rază 1 nu se află în interiorul triunghiului *ABC*, atunci există o dreaptă *d* în plan cu proprietatea că proiecția triunghiului *ABC* pe dreapta *d* este un segment de lungime cel mult 4.

Soluție. a) Din teorema lui Ceva în triunghiul *ABC* găsim $BM = 2MC$. Din teorema lui Menelau în triunghiul ACP cu transversala $B - T - N$, respectiv triunghiul *ABN* cu transversala $C - T - P$, găsim $PT = TC, BT = 3TN$. Ținând cont și că $\frac{BM}{CM} = 2 = \frac{AN}{CN}$, deducem că $\frac{TM}{AM} = \frac{TN}{BN} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = \frac{TP}{CP}$.

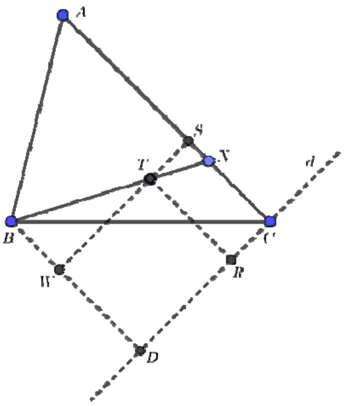


Alternativ: Se pot considera *U*, *V*, respectiv *Q* mijloacele segmentelor *AN*, *AT*, respectiv *BM*. Se folosesc liniile mijlocii *PV*, *VU*, *TN*, *PQ*, *TM* și se deduc relațiile anterioare.

b) Vom demonstra întâi următoarea lemă:

Lemă: Dacă *T* este un punct în interiorul triunghiului *ABC*, $BT \cap AC = \{N\}, BN = k \cdot TN$ și $d(T, AC) \leq 1$ atunci există o dreaptă *d* în plan cu proprietatea că proiecția triunghiului *ABC* pe dreapta *d* este un segment de lungime cel mult *k*.

Soluție lemă: Ducem prin C dreapta d perpendiculară pe AC $(C \in d, d \perp AC)$. Notăm $S = pr_{AC}T$, $R = pr_d T$, $D = pr_d B$, $W = pr_{BD} T$. Atunci $pr_d[ABC] = [CD]$ și $WS = CD$. Cum $SN \parallel BW$ rezultă că



$\frac{TS}{WS} = \frac{TN}{BN} = \frac{1}{k}$, de unde $DC = WS = kTS$. Dar $TS = d(T, AC) \le 1$, deci $DC \le k$.

Revenind la problema noastră, în ipoteza că cercul de centru T și rază 1 nu se află inclus în interiorul triunghiului ABC, deducem că cercul respectiv intersectează cel puțin una din laturile triunghiului, deci distanță de la T la una din laturi este cel mult 1. Dacă $d(T, AB) \le 1$ deducem că există o dreaptă d în plan cu proprietatea că proiecția triunghiului ABC pe dreapta d este un segment de lungime cel mult 2 (aplicăm lema pentru $k = 2$), iar in celelalte două cazuri, anume când $d(T, AC) \le 1$ sau $d(T, BC) \le 1$ rezultă existența unei drepte d în plan cu proprietatea că proiecția triunghiului ABC pe dreapta d este un segment de lungime cel mult 4 (aplicăm lema pentru $k = 4$), de unde rezultă concluzia.

Barem.

a) Demonstrarea cerinței..	3p
a) Demonstrarea cerinței..	4p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.