OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

8 februarie 2020

BAREM DE NOTARE
CLASA A X-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	Fie $z_1=\sqrt{3}+i$ și $z_2=1-i$ $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right), z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$	**2p**
	$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{7\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{19\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{19\pi}{12}\right)\right)$	**1p**
	Deci $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$	**1p**
	Observăm că $z^{12}=2^6\left(\cos 5\pi+i\sin 5\pi\right)=-64$	**2p**
	Ecuația devine $x^3-64=0\Leftrightarrow(x-4)\left(x^2+4x+16\right)=0$ adică $x_1=4$	**2p**
	$x^2+4x+16=0\Rightarrow x_{2,3}=\frac{-4\pm4i\sqrt{3}}{2}=-2\pm2\sqrt{3}i$	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Ecuația inițială este echivalent c $\log_2(x+1)\cdot\log_2(x-1)=\log_2((x+1)^2\cdot(x-1))-2$	**1p**
	Domeniul de definiție a ecuației este $D=[1,+\infty)$ Notăm $\log_2(x+1)=a,\ \log_2(x-1)=b$ Ecuația de mai sus se transcrie $a\cdot b=2a+b-2$ $\Leftrightarrow(a-1)(b-2)=0$ de aici găsim $a=1$ sau $b=2$ Dacă $a=1$, atunci $x=1$ ceea ce nu aparține lui D. Dacă $b=2$, atunci $x=5,\ 5\in D$, deci $M=\{5\}$.	**1p** **1p** **1p** **1p** **2p** **1p** **1p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-6$ atunci se observă ușor că $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+6}$. Astfel ecuația din enunț este echivalent cu $f(x)=f^{-1}(x)\ \Leftrightarrow f(f(x))=x$ (1) Arătăm, că relația de mai sus este adevărat numai dacă $f(x)=x$. Deoarece funcția f este strict crescătoare, pentru $f(x)<x$ avem $f(f(x))<f(x)<x$ ceea ce este fals conform relației (1) , pe de altă parte pentru $f(x)>x$ avem $f(f(x))>f(x)>x$ ceea ce nu corespunde lui (1) Rezultă: $f(x)=x$ Deci $x^3-6=x\ \Leftrightarrow x^3-x-6=0\ \Leftrightarrow(x-2)(x^2+2x+3)=0$ ecuația care are singura soluție $x=2$	**2p** **1p** **1p** **2p** **2p** **1p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	$\left(z_1+z_2+z_3\right)^2=2\left(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3\right)$ $\lvert z_1+z_2+z_3\rvert^2=2\lvert z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3\rvert$ $2\lvert z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3\rvert=2\cdot\left(\dfrac{\lvert z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3\rvert}{\lvert z_1z_2z_3\rvert}\right)=$ $=2\left\lvert\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}\right\rvert=2\lvert\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\rvert$ $2\lvert\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\rvert=2\lvert\overline{z_1+z_2+z_3}\rvert=2\lvert z_1+z_2+z_3\rvert$ Deci $\lvert z_1+z_2+z_3\rvert^2=2\lvert z_1+z_2+z_3\rvert$ și $z_1+z_2+z_3\neq 0$ Rezultă $\lvert z_1+z_2+z_3\rvert=2$	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **1p**
b)	$z=a+bi, a,b\in R.$ $\lvert z\rvert^2+\overline{z}=1-i\Leftrightarrow a^2+b^2+a-bi=1-i$ $b=1, a^2+a=0\Rightarrow a=-1, a=0$ $z_1=-1+i, z_1^2=-2i, z_1^4=-4, z_1^{8n}=\left(z_1^4\right)^{2n}=16^n$ $z_2=i, z_2^{8n}=\left(z_2^4\right)^{2n}=1$	**1p** **1p** **1p** **1p**