OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

8 februarie 2020

BAREM DE NOTARE
CLASA A XI-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	$\det(A)=3\cdot4-1\cdot11=12-11=1$	**1p**
	$X^2=A\Rightarrow\det(X^2)=\det(A)\Leftrightarrow(\det(X))^2=1\Leftrightarrow\det(X)=\pm1$	**1p**
	Dacă $\det(X)=-1$, notăm $tr(X)=t$, astfel din relația lui Cayley-Hamilton pentru matricea X obținem $X^2-t\cdot X+\det(X)\cdot I_2=O_2\Leftrightarrow A-t\cdot X-I_2=O_2$, deci $t\cdot X=A-I_2$	**2p**
	Calculând urma , obținem $t^2=3+4-2\Leftrightarrow t^2=5\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{5}$, de unde	**2p**
	rezultă $X_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(A-I_2)=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}2&11\\1&3\end{pmatrix}$	**1p**
	Dacă $\det(X)=1$ obținem $t\cdot X=A+I_2$, deci $t^2=3+4+2\Leftrightarrow t^2=9\Leftrightarrow t=\pm3$,	**1p**
	de unde rezultă $X_{3,4}=\pm\frac{1}{3}(A+I_2)=\pm\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}4&11\\1&5\end{pmatrix}$.	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Deoarece $A\cdot B=B\cdot A\Rightarrow\det\left(A^2-B^2\right)=\det(A-B)\cdot\det(A+B)$, și luând $B=\sqrt{2020}I_2$ care comută cu matricea A, avem $\det\left(A^2-2020I_2\right)=\det\left(A-\sqrt{2020}I_2\right)\cdot\det\left(A+\sqrt{2020}I_2\right)$	**2p**
	Din $\det\left(A^2-2020I_2\right)=0\Rightarrow\det\left(A-\sqrt{2020}I_2\right)=0$ *sau* $\det\left(A+\sqrt{2020}I_2\right)=0$	**1p**
	Cazul I: Dacă $\det\left(A-\sqrt{2020}I_2\right)=0$, atunci considerăm $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}, a,b,c,d\in\mathbb{Q}\Rightarrow\det\left(A-\sqrt{2020}I_2\right)=ad-\sqrt{2020}(a+d)+2020-bc$,deci avem $\left.\begin{matrix}ad+2020-bc-\sqrt{2020}(a+d)=0\\a,b,c,d\in\mathbb{Q}\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+d=0\Leftrightarrow tr(A)=0$ și $ad+2020-bc=0\Rightarrow\det(A)=-2020$. Conform relației Cayley – Hamilton, avem $A^2-2020I_2=O_2$	**3p**
	Cazul II: Dacă $\det\left(A+\sqrt{2020}I_2\right)=0$, atunci considerăm $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}, a,b,c,d\in\mathbb{Q}\Rightarrow\det\left(A+\sqrt{2020}I_2\right)=ad+\sqrt{2020}(a+d)+2020-bc$, deci avem $\left.\begin{matrix}ad+2020-bc+\sqrt{2020}(a+d)=0\\a,b,c,d\in\mathbb{Q}\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+d=0\Leftrightarrow tr(A)=0$ și $ad+2020-bc=0\Rightarrow\det(A)=-2020$. Conform relației Cayley - Hamilton avem $A^2-2020I_2=O_2$	**3p**

	Altfel: Deoarece $A\cdot B=B\cdot A\Rightarrow \det\left(A^2-B^2\right)=\det\left(A-B\right)\cdot\det\left(A+B\right)$, și luând $B=\sqrt{2020}I_2$ care comută cu matricea A, avem $\det\left(A^2-2020I_2\right)=\det\left(A-\sqrt{2020}I_2\right)\cdot\det\left(A+\sqrt{2020}I_2\right)$	**2p**
	Din $\det\left(A^2-2020I_2\right)=0\Rightarrow\det\left(A-\sqrt{2020}I_2\right)=0$ *sau* $\det\left(A+\sqrt{2020}I_2\right)=0$	**1p**
	Polinomul caracteristic a matricei A este $f_A(x)=\det\left(A-xI_2\right)=x^2-ax+d$, unde $a=tr(A),\ d=\det(A)$. Atunci avem $\begin{cases} f_A\left(\sqrt{2020}\right)=2020-a\sqrt{2020}+d=0 \\ f_A\left(-\sqrt{2020}\right)=2020+a\sqrt{2020}+d=0 \end{cases},a,d\in\mathbb{Q}$	**3p**
	Rezolvând sistemul, obținem $a=tr(A)=0,\ d=\det(A)=-2020$	**1p**
	Conform relației Cayley - Hamilton avem $A^2-2020I_2=O_2$	**2p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	Cum $x_1>0\Rightarrow x_2>0$ și presupunând că $x_k>0$, *k*-arbitrar, rezultă conform relației de recurență că $x_{k+1}>0$, deci $x_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$	**1p**
	Atunci $x_{n+1}=\dfrac{5}{2x_n}+\dfrac{x_n}{2}\geq 2\sqrt{\dfrac{5}{2x_n}\cdot\dfrac{x_n}{2}}=\sqrt{5},\forall n\in\mathbb{N}$, prin aplicarea inegalității mediilor $\left(m_a\geq m_g\right)$ pentru șirul $x_n>0$, deci $x_n\geq\sqrt{5},\forall n\geq 1$	**3p**
	Altfel: $x_{n+1}-\sqrt{5}=\dfrac{5+x_n^2}{2x_n}-\sqrt{5}=\dfrac{\left(x_n-\sqrt{5}\right)^2}{2x_n}\geq 0$	
	Avem $x_{n+1}-x_n=\dfrac{5+x_n^2}{2x_n}--x_n=\dfrac{5-x_n^2}{2x_n}\leq 0$, din faptul că $x_n\geq\sqrt{5},\forall n\geq 1$. Deci șirul este descrescător , de unde rezultă că $x_n\in\left[\sqrt{5},15\right]$, deci conform teoremei lui Weierstrass este convergent. Astfel $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l\in\left[\sqrt{5},15\right]$.	**3p**
	Trecând la imită în relația de recurență obținem ecuația: $l=\dfrac{5+l^2}{2l}\Rightarrow l=-\sqrt{5}$, care nu convine sau $l=\sqrt{5}$, care convine. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{5}$.	**2p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	Luând în relația de recurență n=2 și n=3 obținem că $a_3=6$ și $a_4=24$	**1p**
	Observăm că $a_1=1!,a_2=2!,a_3=3!,a_4=4!$. Deci intuim, că $a_n=n!,\forall n,n\geq 1$	**1p**
	Demonstrație prin inducție matematică: $p(n):a_n=n!,n\geq 1$ **Verificare:** $\begin{matrix} p(1):a_1=1!=1 \\ p(2):a_2=2!=2 \end{matrix}$ adevărat.	**3p**

	Presupunem $p(k): a_k = k!, \forall k \leq n$ adevărat și arătăm că $p(n+1)$ este adevărat. Avem $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot (a_{n+1} - a_n)}, n \geq 2$, de unde $a_{n+1} = \frac{a_n \cdot (a_n + a_{n-1})}{a_{n-1}} = \frac{n! \cdot (n! + (n-1)!)}{(n-1)!} = \frac{n! \cdot (n-1)! \cdot (n+1)}{(n-1)!} = (n+1)!$	
b)	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, unde am notat prin $b_n = \frac{n^n}{n!}, n \geq 1$ Cum $b_n = \frac{n^n}{n!} > 0, \forall n \geq 1 \overset{Cauhy-D'Alembert}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = ... = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{a_n}} = e$	**4p**