OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

8 februarie 2020

BAREM DE NOTARE
CLASA A XII-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) Deoarece operația este comutativă, există elementul neutru $e \in \mathbb{C}$ astfel încât $x \circ e = x$, de unde $\alpha = 3,\ e = -2$. Verificare pentru $x = -3$.	**2p**
	Așadar pentru $\alpha = 3,\quad x \circ x = (x+3)^2 - 3$	**1p**
	Prin inducție se demonstrează, că $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n-ori} = (x+3)^n - 3, \forall n \geq 2$	**2p**
	b) folosind rezultatul de la punctul a) ecuația se poate scrie $(x+3)^{2n} - 2(x+3)^n - 3 = 0$ Folosind substituția $(x+3)^n = t$, rezultă că $t = 3$ și $t = -1$	**2p**
	Din ecuațiile: $(x+3)^n = 3$, de unde $x = \sqrt[n]{3}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) - 3, k = \overline{1, n-1}$ respectiv $(x+3)^n = -1$, de unde $x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n} - 3, k = \overline{1, n-1}$	**2p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	f morfism: $a, c \in G \Rightarrow f(ac) = f(a)f(c) \Leftrightarrow (ac)^n = a^n c^n$ (1)	**2p**
	g morfism: $a, c \in G \Rightarrow g(ac) = g(a)g(c) \Leftrightarrow (ac)^{n+1} = a^{n+1}c^{n+1}$ (2)	**2p**
	$(ac)^{n+1} = (ac)^n ac \overset{1)}{=} a^n c^n ac \overset{2)}{\Rightarrow} a^n c^n ac = a^{n+1}c^{n+1} \Rightarrow$	**1p**
	$(a^n)^{-1}(a^n c^n ac)c^{-1} = (a^n)^{-1} a^{n+1}c^{n+1}c^{-1} \Rightarrow c^n a = ac^n$ (3)	**2p**
	f surjectivă $\Rightarrow \forall b \in G : \exists c \in G : f(c) = b, c^n = b$ (4) Pentru oricare $a, b \in G$: Din (3),(4) $\Rightarrow a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in G \Rightarrow (G, \cdot)$ este grup abelian.	**2p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	$h:[0,4] \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x \cdot e^{2-x}, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$	**2p**
	Demonstrația că h admite primitive	**1p**
	$H(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c_1, & 0 \leq x \leq 2 \\ -xe^{2-x} - e^{2-x} + c_2, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$	**3p**
	H continuă în $x = 2,\ c_2 = 5 + c_1$.	**2p**
	$H(3) = 4 - \frac{4}{e}$ și determinarea primitivei cu $c_1 = -1,\ c_2 = 4$	**1p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	$f'(x) = f(x) + \frac{f(x)}{x} + e^x \Leftrightarrow x \cdot f'(x) - (x+1) f(x) = e^x x \Leftrightarrow$ $\frac{x \cdot e^x \cdot f'(x) - (e^x + xe^x) f(x)}{(xe^x)^2} = \frac{1}{x}$ $\left(\frac{f(x)}{xe^x}\right)' = \frac{1}{x}$	**5p**
	Fie funția $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x \cdot e^x} - \ln x$	**1p**
	$g'(x) = \frac{x \cdot e^x \cdot f'(x) - (e^x + xe^x) f(x)}{(xe^x)^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow g$ este constantă	**1p**
	$g(1) = \frac{f(1)}{e} = 1 \Rightarrow g(x) = 1$ pentru orice $x > 0$	**1p**
	$1 = \frac{f(x)}{x \cdot e^x} - \ln x \Rightarrow f(x) = (1 + \ln x) xe^x, x \in (0,+\infty)$	**1p**