Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 13 februarie 2020

Clasa a V-a - barem

1. **a)** $x=2021^2-2021-2020=2021(2021-1)-2020=2121\cdot 2020-2020=2020^2$ **3p**

b) $y=2^1+2^2+...+2^{2020}=\left(2^1+2^2+2^3+2^4\right)+2^4\left(2^1+2^2+2^3+2^4\right)+...+2^{2016}\left(2^1+2^2+2^3+2^4\right)=$

$=30+2^4\cdot 30+...+2^{2016}\cdot 30 \Rightarrow y$ este divizibil cu 30 **2p**

$y=2^1+2^2+...+2^{2020}=\left(2^1+2^2+2^3+2^4+2^5\right)+2^5\left(2^1+2^2+2^3+2^4+2^5\right)+...+2^{2015}\left(2^1+2^2+2^3+2^4\right.$

$=62+2^4\cdot 62+...+2^{2015}\cdot 62=2\cdot 31\left(1+2^5+...+2^{2015}\right) \Rightarrow y$ este divizibil cu 31 **2p**

2. **a)** Numărul de partide este $5+4+3+2+1=15$ **3p**

b) Dacă o echipă câştigă atunci suma punctelor celor două echipe este 3. Dacă meciul e egal atunci suma este 2, deci se pierde 1p. **1p**

Suma maximă a punctelor este 45p. **1p**

Diferenţa de 5p implică 5 meciuri egale. **2p**

3. **a)** Numerele $a=5$, $b=3$, $c=2$ şi $d=7$ furnizează un exemplu. **2p**

b) $a=b+c \Rightarrow a\neq 2$, $d=a+c \Rightarrow c$ par, deci $c=2$ **1p**

Obţinem $a=b+2$ şi $d=b+4$ **1p**

Dacă $b=3k+1 \Rightarrow a=3(k+1)$ absurd, iar dacă $b=3k+2 \Rightarrow d=3(k+2)$ absurd **2p**

Rămâne $b=3k$ şi cum b prim $\Rightarrow b=3$, deci $a=5$ şi $d=7$. **1p**

4. **a)** Cum $U\left(n^{9102}\right)=9$, n nu poate fi par **1p**

Dacă $U(n)=1 \Rightarrow U\left(n^{9102}\right)=1$ absurd **1p**

Dacă $U(n)=5 \Rightarrow U\left(n^{9102}\right)=5$ absurd **1p**

Dacă $U(n)=9 \Rightarrow U\left(n^{9102}\right)=1$ absurd **1p**

b) Dacă $U(n)\in\{3,7\}$ atunci $U\left(n^{9102}\right)=9$ **1p**

Pentru $U(n)=3 \Rightarrow U\left(n^{2019}\right)=7$. Pentru $U(n)=7 \Rightarrow U\left(n^{2019}\right)=3$ **2p**

NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro