OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
08.02.2020
BAREM

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I

a) Inegalitatea este echivalantă cu $(a-b)^2 \geq 0$ cu egalitate dacă $a=b$ 2p

b) Se impun condițiile de existență $x \geq 1, y \geq 4, z \geq 9$

Cu ajutorul inegalității de la punctul a) avem succesiv:

$$1 \cdot \sqrt{x-1} \leq \frac{1+x-1}{2},$$

$$2 \cdot \sqrt{y-4} \leq \frac{4+y-4}{2},$$

$$3 \cdot \sqrt{z-9} \leq \frac{9+z-9}{2},$$

....2p

egalităţile având loc pentru: $1=\sqrt{x-1},\ 2=\sqrt{y-4},\ 3=\sqrt{z-9}$. 1p

Adunând inegalităţile anterioare, obţinem: $\sqrt{x-1}+2\cdot\sqrt{y-4}+3\cdot\sqrt{z-9} \leq \frac{x+y+z}{2}$;.......1p

egalitatea având loc doar pentru: $1=\sqrt{x-1},\ 2=\sqrt{y-4},\ 3=\sqrt{z-9}$,

de unde obţinem: $x=2, y=8, z=18$ 1p

SUBIECTUL II

a) Presupunem că $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, rezultă că $\sqrt{n}=\frac{a}{b},\ a,b \in \mathbb{N}, b \neq 0, (a,b)=1$ 1p

Obținem $n=\frac{a^2}{b^2} \in \mathbb{N}$ și cum $(a,b)=1$ rezultă că $b=1$. Rezultă $n=a^2, a \in \mathbb{N}$, deci n este pătrat perfect. 1p

Reciproc este evident...1p

b) $\sqrt{n^2+8n+51} \in \mathbf{Q}, n^2+8n+51 \in \mathbf{N} \Rightarrow \sqrt{n^2+8n+51} \in \mathbf{N} \Rightarrow$

$n^2+8n+51=k^2$, $k \in \mathbf{N}$ 1p

(n+ 4 - k)(n + 4 +k) = −35, $n+4+k \in \{1, 5, 7, 35\}$..2p

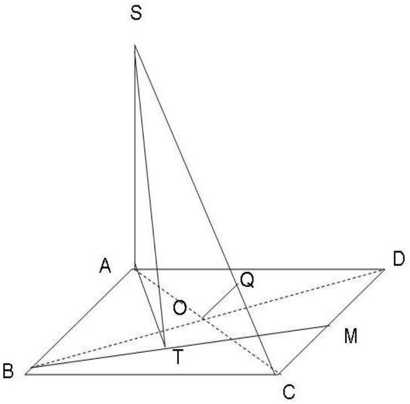
Finalizare : n = 13..1p

SUBIECTUL III

a) SA $\perp$ (ABC) , BD $\subset$ (ABC), $\Rightarrow$ SA $\perp$ BD . ... 1 p

AC $\perp$ BD (ABCD pătrat), $\Rightarrow$ BD $\perp$ (SAC) . ... 1 p

Cum SC $\subset$ (SAC), $\Rightarrow$ BD $\perp$ SC. .... 1 p



b) Fie O centrul pătratului ABCD. În ΔSAC construim $OQ \perp SC$, $Q \in SC$ că $BD \perp (SAC)$ si, cum $OQ \subset (SAC)$, $\Rightarrow OQ \perp BD$...1 p

Din ΔOQC ~ Δ SAC se obține că $OQ = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. ..... 1 p

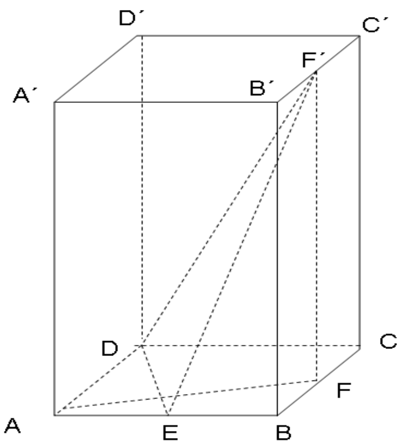
c) Construim $AT \perp BM$, $T \in BM$; cum $SA \perp (ABC)$, din teorema celor trei perpendiculare urmează că $ST \perp BM$, deci distanța de la punctul S la dreapta BM este ST.

Aria triunghiului ABM este jumătate din cea a pătratului ABCD,

iar $BM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ .... 1 p

$\Rightarrow AT = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$ .... 1 p

SUBIECTUL IV



a) Fie $DE \cap AF = \{M\}$ ΔAED≡ΔBFA (CC) .... 1 p

$\Rightarrow$ <AED≡ < BFA. Atunci în ΔAME:
m< (EAM)+ m< (AEM)= m< (BAF)+ m< (BFA) = 90 o
Rezultă că m <(AME)= 90° , deci $AF \perp DE$ .... 1 p

b) $FF' \perp (ABCD)$, $MF \perp DE$ (cf. punctului a)) ; MF, DE $\subset (ABCD) \Rightarrow F'M \perp DE$,
deci unghiului plan corespunzător unghiului diedru este <F'MF .... 1 p
În triunghiul ΔDAE aplicăm teorema lui Pitagora $\Rightarrow$ DE= $3\sqrt{5}$

$AM \perp DE \Rightarrow AM = \dfrac{AD \cdot AE}{DE} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ .... 1 p

Atunci MF=AF-AM=$\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$

În triunghiul F`FM: tg(∠F`FM)= $\dfrac{F'F}{MF} = \sqrt{5}$ .... 1 p

c) Pe semidreapta (AB luăm N astfel încât BN=BF. $\Delta PBN \equiv \Delta PBF(C.C) \Rightarrow PN = PF(1)$
Perimetrul triunghiului A´PF este minim $\Leftrightarrow$ A´P+PF+ A`F este minimă.
Cum A`F=constant perimetrul este minim $\Leftrightarrow$ A´P+PF este minim $\Leftrightarrow$ A´P+PN este minim $\Leftrightarrow$ A`, P, N sunt coliniare. .... 1 p

$PB \parallel AA' \Rightarrow \Delta NPB \sim \Delta NA'A \Rightarrow \dfrac{PB}{AA'} = \dfrac{BN}{NA} \Rightarrow$ PB=3cm .... 1 p