OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
8 februarie 2020
BAREM DE NOTARE
CLASA A IX-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	Presupunem $\sqrt{2020^n-2021}=a\in\mathbb{N}$	**1p**
	$2020^n-2021=a^2\Rightarrow a=2k+1$**(impar),** $k\in\mathbb{N}$	**2p**
	$(2^2\cdot 5\cdot 101)^n-2021=4k^2+4k+1\Rightarrow 2^{2n}\cdot 5^n\cdot 101^n=4k^2+4k+2022$	**3p**
	$\underbrace{2^{2n-1}\cdot 5^n\cdot 101^n}_{par}=\underbrace{2k^2+2k+1011}_{impar}$ fals deci $\sqrt{2020^n-2021}\notin\mathbb{N}$ **Metoda 2)** $2020^n-2021=M_4+3\Rightarrow\sqrt{2020^n-2021}\notin\mathbb{N}$	**3p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	i) $\frac{a^5+b^5}{a^3b^3}\geq\frac{a+b}{ab}\Rightarrow\frac{a^5+b^5}{a^2b^2}\geq a+b\Rightarrow a^5+b^5\geq a^3b^2+a^2b^3$	**1p**
	$a^5-a^3b^2+b^5-a^2b^3\geq 0\Rightarrow a^3\left(a^2-b^2\right)-b^3\left(a^2-b^2\right)\geq 0$	**1p**
	$\left(a^2-b^2\right)\left(a^3-b^3\right)\geq 0\Rightarrow(a-b)^2(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)\geq 0$	**2p**
	ii) $x^{1010}=a, y^{1010}=b, z^{1010}=c\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{c^3}+\frac{b^2+c^2}{a^3}+\frac{c^2+a^2}{b^3}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$	**1p**
	$\frac{a^2+b^2}{c^3}=\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{c^3}$ $\frac{b^2+c^2}{a^3}=\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{a^3}$ $\frac{c^2+a^2}{b^3}=\frac{c^2}{b^3}+\frac{a^2}{b^3}$ $\frac{a^2+b^2}{c^3}+\frac{b^2+c^2}{a^3}+\frac{c^2+a^2}{b^3}=\overbrace{\left(\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{a^3}\right)}^{\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\overbrace{\left(\frac{a^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\right)}^{\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\overbrace{\left(\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{b^3}\right)}^{\geq\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\overset{i)}{\geq}2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$	**4p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	$\lvert x+2020\rvert\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$	**1p**
	$\frac{x^2+x}{2}=\frac{x(x+1)}{2}\in\mathbb{Z}$,$\forall x\in\mathbb{Z}$	**2p**

	$\lvert x+2020\rvert = \frac{x^2+x}{2}+2019$	**2p**
	$x \geq -2020 \Rightarrow x+2020 = \frac{x^2+x}{2}+2019 \Rightarrow x \in \{-1,2\}$ **convin**	**2p**
	$x < -2020 \Rightarrow -x-2020 = \frac{x^2+x}{2}+2019 \Rightarrow x \in \varnothing$	**2p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	O centrul cercului circumscris şi H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentre $\overset{Sylvester}{\Rightarrow}$ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH_1}$ (1) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OH_2}$ (2) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OH_3}$ (3) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OH_4}$ (4)	**4p**
	$(1)-(2) \Rightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OH_1}-\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{H_2H_1}$ $(4)-(3) \Rightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OH_4}-\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{H_3H_4}$	**4p**
	$\overrightarrow{H_2H_1}=\overrightarrow{H_3H_4} \Rightarrow H_1H_2H_3H_4$ **paralelogram**	**1p**