OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020

Clasa a IX-a

1. (a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, m număr par. Demonstraţi că dacă $\sqrt{2} < \frac{m}{n}$, atunci $\sqrt{2} < \frac{m}{n} - \frac{1}{mn}$.

   (b) Fie $a \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $\sqrt{2} < a$. Demonstraţi că există $a' \in \mathbb{Q}$, astfel încât $\sqrt{2} < a' < a$.

2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia
$$3\{x\}^2 + 11\{x\} = 7x - 5.$$
Prin $\{x\}$ am notat partea fracţionară a numărului real x.

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n - 2$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}^*$, distincte două câte două. Demonstraţi că dacă
$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n^2 + n + 2k}{2},$$
atunci printre numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ există $n - k$ numere naturale consecutive.

4. Se dă un patrulater $ABCD$ înscris în cercul de centru O şi fie H, K ortocentrele triunghiurilor ACD, respectiv BCD. Fie L mijlocul laturii AB. Ştiind că O este centrul de greutate al triunghiului HKL, arătaţi că $ABCD$ este trapez isoscel.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020

Clasa a X-a

1. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2020x$ şi $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = \left[\frac{x}{2020}\right]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.
   (a) Arătaţi că $g \circ f = 1_{\mathbb{Z}}$, unde $1_{\mathbb{Z}}$ este funcţia identică a mulţimii $\mathbb{Z}$.
   (b) Este g inversa lui f? Justificaţi răspunsul!
2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia
$$2^{-\sin^2 x} + 2^{-\cos^2 x} = \sin x + \cos x.$$
3. Fie n un număr natural nenul fixat. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul
$$\begin{cases} \sqrt[2019]{x^n} = y - z \\ \sqrt[2019]{y^n} = z - x \\ \sqrt[2019]{z^n} = x - y \end{cases}$$
4. Se consideră numerele complexe z_1, z_2 şi z_3, distincte două câte două, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Ştiind că $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = 3$, calculaţi $|z_1^{2020} + z_2^{2020} + z_3^{2020}|$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020

Clasa a XI-a

1. În reperul cartezian xOy considerăm triunghiul echilateral ABC. Arătaţi că cel puţin una dintre coordonatele punctelor A, B sau C este număr iraţional.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $\det(A) = 0$. Notăm cu $tr(A) = a + d$ urma matricei A.

   (a) Arătaţi că dacă $tr(A) < 0$ ecuaţia $X^{2020} = A$ nu are soluţii în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Arătaţi că dacă $tr(A) > 0$ ecuaţia $X^{2020} = A$ are exact două soluţii în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (c) Arătaţi că ecuaţia $X^{2020} = A$ are o infinitate de soluţii în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă şi numai dacă $A = \mathbf{O}_2$.

3. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 \in (0,1)$ şi $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$, pentru orice $n \geq 1$.

   (a) Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

   (b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

4. Se consideră numerele naturale nenule p şi q şi numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, ..., a_p$, $b_1, b_2, ..., b_q$. Ştiind că

$$a_1^n + a_2^n + ... + a_p^n = b_1^n + b_2^n + ... + b_q^n,$$

pentru o infinitate de numere naturale n, arătaţi că

$$a_1^x + a_2^x + ... + a_p^x = b_1^x + b_2^x + ... + b_q^x,$$

pentru orice număr real x.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020

Clasa a XII-a

1. Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care admit o primitivă $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $F(x) = \{f(x)\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, unde prin $\{a\}$ înţelegem partea fracţionară a numărului real a.

2. (a) Arătaţi că $\int\limits_{-1}^{1} \ln(x^2 + x + 1)dx = \int\limits_{-1}^{1} \ln(x^2 - x + 1)dx$.

   (b) Calculaţi $\int\limits_{-1}^{1} \ln(x^4 + 3x^2 + 4)dx$.

3. Fie $I_n = \displaystyle\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^n \cdot \frac{1}{x}dx$, $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că

$$2nI_n = 5\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 8(n-1)I_{n-2}, \text{ pentru } n \geq 2.$$

4. (a) Arătaţi că orice grup cu 9 elemente este abelian.

   (b) Există vreun monoid necomutativ cu 9 elemente?

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.