OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020
Soluţii

Clasa a IX-a

1. (a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, m număr par. Demonstraţi că dacă $\sqrt{2} < \frac{m}{n}$, atunci $\sqrt{2} < \frac{m}{n} - \frac{1}{mn}$.
   (b) Fie $a \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $\sqrt{2} < a$. Demonstraţi că există $a' \in \mathbb{Q}$, astfel încât $\sqrt{2} < a' < a$.

Romeo Ilie

Soluţie.

(a) $2n^2 < m^2$ .... **1 punct**
$2n^2, m^2$ numere pare .... **1 punct**
$2n^2 \le m^2 - 2$ .... **1 punct**
$2 \le \frac{m^2}{n^2} - \frac{2}{n^2} < \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{mn}\right)^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{2} < \frac{m}{n} - \frac{1}{mn}$ .... **2 puncte**

(b) Fie $a \in \mathbb{Q}$, $a > \sqrt{2}$. Există $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $a = \frac{p}{q} = \frac{2p}{2q}$.
Alegem $a' = \frac{p}{q} - \frac{1}{4pq} \in \mathbb{Q}$. Conform (a), $\sqrt{2} < a' < a$. .... **2 puncte**

2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia
$$3\{x\}^2 + 11\{x\} = 7x - 5.$$
Prin $\{x\}$ am notat partea fracţionară a numărului real x.

Ioana Maşca

Soluţie.
Fie $x \in \mathbb{R}$ o soluţie a ecuaţiei.
$0 \le \{x\} < 1 \Rightarrow 0 \le 3\{x\}^2 + 11\{x\} < 14 \Rightarrow 0 \le 7x - 5 < 14 \Rightarrow \frac{5}{7} \le x < \frac{19}{7}$.
Deci $[x] \in \{0, 1, 2\}$.. **2 puncte**
1) $[x] = 0$. Atunci $x = \{x\}$. Se obţine ecuaţia $3\{x\}^2 + 4\{x\} + 5 = 0$, care nu are soluţii. .... **1 punct**
2) $[x] = 1$. Avem $x = 1 + \{x\}$. Obţinem $3\{x\}^2 + 4\{x\} - 2 = 0$. Ecuaţia $3z^2 + 4z - 2 = 0$ are soluţiile $z_1 = \frac{-2+\sqrt{10}}{3} \in [0, 1)$ şi $z_2 = \frac{-2-\sqrt{10}}{3} \notin [0, 1)$.
Rezultă soluţia $x_1 = 1 + z_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$. .... **2 puncte**
3) $[x] = 2$. Atunci $x = 2 + \{x\}$. Obţinem $3\{x\}^2 + 4\{x\} - 9 = 0$.
Ecuaţia $3z^2 + 4z - 9 = 0$ nu are rădăcini în intervalul $[0, 1)$. .... **1 punct**
În concluzie, ecuaţia are o unică soluţie: $x_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$. .... **1 punct**

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n-2$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}^*$, distincte două câte două. Demonstraţi că dacă

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n^2+n+2k}{2},$$

atunci printre numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ există $n-k$ numere naturale consecutive.

Romeo Ilie

Soluţie.
Putem presupune $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Atunci $a_i \geq i$, $i = \overline{1,n}$. .... **2 puncte**
Demonstrăm că $a_i = i$, $i = \overline{1, n-k}$. .... **1 punct**
Presupunem, prin reducere la absurd, că există $p \in \{1, \cdots, n-k\}$ astfel încât $a_p > p$. .... **1 punct**
Atunci $a_i \geq i+1$, $i = \overline{p,n}$. .... **1 punct**
Rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} i + (n-p+1) = \frac{n^2+n}{2} + n - p + 1 \geq \frac{n^2+n}{2} + k + 1 > \frac{n^2+n+2k}{2}.$$

Contradicţie. Deci numerele $a_1, a_2, \cdots, a_{n-k}$ sunt consecutive. .... **2 puncte**

4. Se dă un patrulater $ABCD$ înscris în cercul de centru O şi fie H, K ortocentrele triunghiurilor ACD, respectiv BCD. Fie L mijlocul laturii AB. Ştiind că O este centrul de greutate al triunghiului HKL, arătaţi că $ABCD$ este trapez isoscel.

Gazeta Matematică

Soluţie.
(1) $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{0}$ (O este centrul de greutate al $\triangle HKL$). ...... **1 punct**
(2) $\begin{cases} \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \\ \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \end{cases}$ (conform relaţiei lui Sylvester). .... **2 puncte**
(3) $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ (conform relaţiei vectoriale a medianei). .... **1 punct**
Din (1), (2) şi (3) obţinem $\frac{3}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + 2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{0}$. .... **1 punct**
Fie M mijlocul CD.
Avem $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ (conform relaţiei vectoriale a medianei).
Rezultă $\overrightarrow{OL} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{OM}$, deci punctele L, O, M sunt coliniare. .... **1 punct**
Dar $OL \perp AB$ şi $OM \perp CD$, deci $AB \| CD$.
Rezultă că $ABCD$ este un trapez inscriptibil, deci isoscel. .... **1 punct**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020
Soluţii

Clasa a X-a

1. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2020x$ şi $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = \left[\frac{x}{2020}\right]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

   (a) Arătaţi că $g \circ f = 1_{\mathbb{Z}}$, unde $1_{\mathbb{Z}}$ este funcţia identică a mulţimii $\mathbb{Z}$.

   (b) Este g inversa lui f? Justificaţi răspunsul!

***

Soluţie.

(a) $(g \circ f)(x) = \left[\frac{2020x}{2020}\right] = [x] = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, deci $g \circ f = 1_{\mathbb{Z}}$. .... **3 puncte**

(b) $(f \circ g)(x) = 2020 \cdot \left[\frac{x}{2020}\right]$, $x \in \mathbb{Z}$. .... **1 punct**
$(f \circ g)(1) = 0 \neq 1$.
Rezultă $f \circ g \neq 1_{\mathbb{Z}}$, deci g nu este inversa lui f. .... **3 puncte**

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$2^{-\sin^2 x} + 2^{-\cos^2 x} = \sin x + \cos x.$$

Aurel Bârsan

Soluţie.
Aplicând inegalitatea mediilor, obţinem:
$2^{-\sin^2 x} + 2^{-\cos^2 x} \geq 2\sqrt{2^{-\sin^2 x - \cos^2 x}} = \sqrt{2},\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
Egalitatea are loc pentru $\sin^2 x = \cos^2 x$. .... **2 puncte**
$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2},\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
Egalitatea are loc pentru $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. .... **2 puncte**
Rezultă că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$,
$2^{-\sin^2 x} + 2^{-\cos^2 x} = \sin x + \cos x \Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x$ şi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. ... **2 puncte**
Rezolvând în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} \sin^2 x = \cos^2 x \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases}$ obţinem mulţimea de soluţii ale ecuaţiei date: $S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. .... **1 punct**

3. Fie n un număr natural nenul fixat. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} \sqrt[2019]{x^n} = y - z \\ \sqrt[2019]{y^n} = z - x \\ \sqrt[2019]{z^n} = x - y \end{cases}$$

Cătălin Ciupală

Soluţie.
Dacă n este număr par atunci, prin adunarea celor trei ecuaţii, obţinem

$$\sqrt[2019]{x^n} + \sqrt[2019]{y^n} + \sqrt[2019]{z^n} = 0.$$

Deducem că $x = y = z = 0$ este soluţia unică a sistemului. .... **3 puncte**
Dacă n este număr impar, atunci înmulţim prima ecuaţie cu x, a doua cu y, a treia cu z şi le adunăm. Astfel, obţinem:

$$\sqrt[2019]{x^{n+2019}} + \sqrt[2019]{y^{n+2019}} + \sqrt[2019]{z^{n+2019}} = yx - zx + zy - xy + xz - yz = 0.$$

Cum $n + 2019$ este număr par, rezultă că $x = y = z = 0$ este soluţia unică a sistemului. .... **4 puncte**

4. Se consideră numerele complexe z_1, z_2 şi z_3, distincte două câte două, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Ştiind că $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = 3$, calculaţi $|z_1^{2020} + z_2^{2020} + z_3^{2020}|$.

Aurel Bârsan

Soluţie.
$|z_1^3+z_2^3+z_3^3| = 3 = |z_1^3|+|z_2^3|+|z_3^3|$ deci există $a, b > 0$ astfel încât $z_2^3 = az_1^3, z_3^3 = bz_1^3$.
Trecând la modul obţinem $a = b = 1$. .... **2 puncte**
Notăm $z = z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$.
Cum $|z| = 1$, există $\alpha \in [0, 2\pi)$ astfel ca $z = \cos\alpha + i \sin\alpha$. .... **1 punct**.
Numerele complexe distincte z_1, z_2 şi z_3 sunt rădăcinile cubice ale numărului z, adică $\{z_1, z_2, z_3\} = \{z_0, z_0\varepsilon, z_0\varepsilon^2\}$, unde $z_0 = \cos\frac{\alpha}{3} + i \sin\frac{\alpha}{3}$ şi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$.
.... **2 puncte**
Atunci
$|z_1^{2020} + z_2^{2020} + z_3^{2020}| = |z_0^{2020}(1 + \varepsilon^{2020} + \varepsilon^{4040})| = |z_0^{2020}(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)| = 0$... **2 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020
Soluţii

Clasa a XI-a

1. În reperul cartezian xOy considerăm triunghiul echilateral ABC. Arătaţi că cel puţin una dintre coordonatele punctelor A, B sau C este număr iraţional.

***

Soluţie.
Presupunem, prin reducere la absurd, că toate coordonatele punctelor A, B şi C sunt numere raţionale. Atunci aria triunghiului ABC,

$$\sigma[ABC] = \frac{1}{2}|\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix},$$

este un număr raţional. .... **4 puncte**
Dar $\sigma[ABC] = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deoarece $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \in \mathbb{Q}$. Contradicţie. Deci cel puţin una dintre coordonatele vârfurilor triunghiului este un număr iraţional. .... **3 puncte**

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $\det(A) = 0$. Notăm cu $tr(A) = a + d$ urma matricei A.

   (a) Arătaţi că dacă $tr(A) < 0$ ecuaţia $X^{2020} = A$ nu are soluţii în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Arătaţi că dacă $tr(A) > 0$ ecuaţia $X^{2020} = A$ are exact două soluţii în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (c) Arătaţi că ecuaţia $X^{2020} = A$ are o infinitate de soluţii în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă şi numai dacă $A = \mathbf{O}_2$.

Cătălin Ciupală

Soluţie.
(a) Presupunem că există $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel ca $X^{2020} = A$.
Atunci $[\det(X)]^{2020} = \det(A) = 0$, deci $\det(X) = 0$. .... **1 punct**
Ca urmare, $X^2 = tr(X)X$, de unde $A = X^{2020} = [tr(X)]^{2019}X$.
Rezultă $tr(A) = [tr(X)]^{2020} \geq 0$. Contradicţie. .... **1 punct**
(b) Avem $X^{2020} = A \Leftrightarrow [tr(X)]^{2019}X = A$. Atunci $[tr(X)]^{2020} = tr(A)$, de unde obţinem $tr(X) = \pm \sqrt[2020]{tr(A)}$. Ca urmare, ecuaţia matriceală dată are două soluţii: $X_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt[2020]{tr(A)^{2019}}}A$. .... **2 puncte**

(c) Conform (a) şi (b), dacă ecuaţia $X^{2020} = A$ are o infinitate de soluţii în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ atunci $tr(A) = 0$. .... **1 punct**
Fie $X_0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o soluţie a ecuaţiei. Obţinem $tr(X_0) = 0$, de unde $X_0^2 = O_2$. Rezultă $A = X_0^{2020} = O_2$. .... **1 punct**
Matricele $X(a) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, sunt soluţii ale ecuaţiei $X^{2020} = O_2$ ... **1 punct**

3. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 \in (0,1)$ şi $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$, pentru orice $n \geq 1$.

   (a) Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

   (b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Gazeta Matematică

Soluţie.
(a) Se demonstrează prin inducţie că $a_n \in (0,1), \forall\, n \geq 1$. .... **2 puncte**
Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ este convexă. Rezultă $2^x < x + 1$, $\forall\, x \in (0,1)$.
Ca urmare, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. .... **2 puncte**
Atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu limita $L \in [0,1)$. Numărul L satisface relaţia $L = 2^L - 1$, obţinută prin trecere la limită în relaţia de recurenţă.
Rezultă $L = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. .... **1 punct**
(b) $a_n \to 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{a_n}-1}{a_n} = \ln 2$ .... **2 puncte**

4. Se consideră numerele naturale nenule p şi q şi numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, ..., a_p$, $b_1, b_2, ..., b_q$. Ştiind că

$$a_1^n + a_2^n + ... + a_p^n = b_1^n + b_2^n + ... + b_q^n,$$

pentru o infinitate de numere naturale n, arătaţi că

$$a_1^x + a_2^x + ... + a_p^x = b_1^x + b_2^x + ... + b_q^x,$$

pentru orice număr real x.

Aurel Bârsan

Soluţie.
Putem presupune că $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_p$ şi $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_q$. Din ipoteză, deducem că există un şir de numere naturale $(n_i)_{i\geq 1}$, strict crescător, cu $\lim\limits_{i\to\infty} n_i = \infty$, astfel ca $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k^{n_i} = \sum\limits_{k=1}^{q} b_k^{n_i}$, $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$. Presupunem $a_p < b_q$. Atunci obţinem

$$1 = \lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{p} a_k^{n_i}}{\sum_{k=1}^{q} b_k^{n_i}} = \lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{p} \left(\frac{a_k}{b_q}\right)^{n_i}}{1 + \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{b_k}{b_q}\right)^{n_i}} = 0.$$

Contradicţie. Analog, inegalitatea $a_p > b_q$ este falsă. Deci $a_p = b_q$. . . ... **3 puncte**

Atunci $\sum_{k=1}^{p-1} a_k^{n_i} = \sum_{k=1}^{q-1} b_k^{n_i}$, $\forall\ i \in \mathbb{N}^*$. .... **1 punct**

Repetând raţionamentul, obţinem $a_{p-1} = b_{q-1}$ şi aşa mai departe. În final, deducem $p = q$ şi $a_k = b_k$, $\forall\ k \in \{1, 2, \cdots, p\}$, de unde rezultă concluzia. .... **3 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020
Soluţii

Clasa a XII-a

1. Determinaţi funcţiile continue $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ care admit o primitivă $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ cu proprietatea că $F(x)=\{f(x)\}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, unde prin $\{a\}$ înţelegem partea fracţionară a numărului real a.

Romeo Ilie

Soluţie.
$F=f-[f]\Longrightarrow[f]$ continuă. .... **1 punct**
$[f]$ continuă $\Longrightarrow\ \exists\, k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $[f(x)]=k,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. .... **2 puncte**
$f(x)-F(x)=k,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\Longrightarrow\big(F(x)\cdot e^{-x}\big)'=(-k\cdot e^{-x})',\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. ..... **2 puncte**
Atunci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(x)\cdot e^{-x}=c-k\cdot e^{-x},\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.
Astfel, $F(x)=ce^{x}-k,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. .... **1 punct**
Obţinem $f(x)=ce^{x},\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. Dar $f(x)\in[k,k+1),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.
Deducem $c=k=0$, iar f este funcţia identic nulă. .... **1 punct**

2. (a) Arătaţi că $\int\limits_{-1}^{1}\ln(x^2+x+1)dx=\int\limits_{-1}^{1}\ln(x^2-x+1)dx$.

   (b) Calculaţi $\int\limits_{-1}^{1}\ln(x^4+3x^2+4)dx$.

Ioana Maşca

Soluţie.
(a) Cu schimbarea de variabilă $x=-t$, obţinem
$\int\limits_{-1}^{1}\ln(x^2+x+1)dx=\int\limits_{1}^{-1}\ln(t^2-t+1)(-1)dt=\int\limits_{-1}^{1}\ln(x^2-x+1)dx$. .... **2 puncte**
(b) $x^4+3x^2+4=(x^2+2)^2-x^2=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$. .... **2 puncte**
$\int\limits_{-1}^{1}\ln(x^4+3x^2+4)dx=\int\limits_{-1}^{1}\ln(x^2+x+2)dx+\int\limits_{-1}^{1}\ln(x^2-x+2)dx=2\int\limits_{-1}^{1}\ln(x^2+x+2)dx=$
$=2\left[x\ln(x^2+x+2)\Big|_{-1}^{1}-\int\limits_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{x^2+x+2}dx\right]=6\ln2-8+\int\limits_{-1}^{1}\frac{2x+1}{x^2+x+2}dx+7\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+x+2}dx=$
$=7\ln2-8+2\sqrt{7}\left(\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$. .... **3 puncte**

3. Fie $I_n = \int\limits_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^n \cdot \frac{1}{x} dx$, $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că

$$2nI_n = 5\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 8(n-1)I_{n-2}, \text{ pentru } n \geq 2.$$

Gazeta Matematică

Soluţie.
Fie $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Integrând prin părţi, obţinem
$I_n = \int\limits_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int\limits_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-1} \left(x + \frac{1}{x}\right)' dx$ .... **2 puncte**
$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-1} \left(x + \frac{1}{x}\right) |_1^2 - (n-1) \int\limits_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-2} \frac{1}{x} dx$.......... **2 puncte**
$= \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - (n-1) \int\limits_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-2} \frac{1}{x} \left[4 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right] dx$
$= \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4(n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, ... **2 puncte**
de unde rezultă relaţia de recurenţă din enunţ. .... **1 punct**

4. (a) Arătaţi că orice grup cu 9 elemente este abelian.
   (b) Există vreun monoid necomutativ cu 9 elemente?

Andrei Caţaron

Soluţie.
(a) Un grup finit de ordin p^2, unde p este un număr prim, este abelian. Prin urmare, un grup cu $9 = 3^2$ elemente este abelian. .... **2 puncte**
(b) Există monoizi necomutativi cu 9 elemente.
Exemplu.
Pe mulţimea $M = \{e, a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ definim legea de compoziţie $*$ prin:
$a_i * e = e * a_i = a_i,\ \forall\ i \in \{1, 2, \cdots, 8\}$, şi $a_i * a_j = a_i\ \forall\ i, j \in \{1, 2, \cdots, 8\}$.
Legea $*$ este asociativă, necomutativă, cu elementul neutru e.
Rezultă că $(M, *)$ este un monoid necomutativ. .... **5 puncte**
Exemplu alternativ de monoid necomutativ cu 9 elemente:
$(M, \cdot)$, unde $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.