**OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ**

**SUCEAVA**

**2 februarie 2020**

**CLASA a X-a**

**1. (3p)** a) Se consideră ecuația $az^2+bz+c=0$, cu $a,b,c\in\mathbb{C}^*$, astfel încât $|b|\geq 2|c|$. Să se arate că ecuația dată are cel puțin o rădăcină în modul mai mică sau egală cu 1.
**(4p)** b) Fie $1,\varepsilon,\varepsilon^2$ rădăcinile cubice ale unității. Să se determine $z\in\mathbb{C}$, știind că:

$$\max\left\{|z-1|,|z-\varepsilon|,\left|z-\varepsilon^2\right|\right\}\leq 1$$

**2. (7p)** Fie $a,b,c\in(1,+\infty)$. Să se arate că:

$$\frac{1}{\log_a b+\log_b c}+\frac{1}{\log_b c+\log_c a}+\frac{1}{\log_c a+\log_a b}\leq\frac{\left(\log_a b\right)^2+\left(\log_b c\right)^2+\left(\log_c a\right)^2}{2}$$

**3. (7p)** Să se rezolve ecuația $2^{\sin x}+2^{\cos^2\frac{x}{2}}=3, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

**4.** Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f\left(x^2+f(y)\right)=xf(x)+y, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

**(2p)** a) Să se arate că *f* este funcție bijectivă;

**(5p)** b) Să se determine funcțiile care verifică relația din enunț.

**Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
**2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.**
**3. Timp de lucru 3 ore.**