OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
2 februarie 2020

CLASA a XI-a

1. (7p) Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = B^2 = O_n$. Demonstrați că

$$\det(A+B)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(ABA+BAB)=0.$$

2. Fie G mulțimea matricelor pătratice de ordinul 3 care au elementele egale cu -1 sau 1.

a) (2p) Câte elemente are mulțimea G ?

b) (5p) Determinați mulțimea $\{\det(A) \ / \ A \in G\}$.

3. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+4k}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) (3p) Să se demonstreze că $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

b) (4p) Să se calculeze $\lim_{n\to+\infty} x_n{}^n$.

4. Spunem că un șir de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea (P) dacă $(x_{2n})_{n\geq 1}$ este șir crescător și $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ este șir descrescător.

a) (2p) Dați exemplu de un șir cu proprietatea (P) care nu are limită.

b) (5p) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir cu proprietatea (P). Dacă șirul $(x_{3n})_{n\geq 1}$ are limită, demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.