OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

2 februarie 2020

CLASA a IX-a

1. **(7p)** Dacă $a,b,c\in(0,+\infty)$ și $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{15}{2}$, să se demonstreze că $\frac{3}{2}\leq a+b+c\leq 6$. Când se obțin egalitățile?

2. **(4p)** a) Să se determine numerele reale pozitive $a_1,a_2,...,a_n,...$, știind că $a_3=3$ și sunt verificate relațiile:

$$a_1^3+\frac{1}{2^2}\cdot a_2^3+...+\frac{1}{n^2}\cdot a_n^3=\frac{a_na_{n+1}}{2},\forall n\in\mathbb{N},n\geq 1.$$

(3p) b) Fie $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. Să se calculeze suma:

$$S=\left[\frac{x+1}{x}\right]+\left[\frac{x+2}{x+1}\right]+\left[\frac{x+3}{x+2}\right]+...+\left[\frac{x+2019}{x+2018}\right],$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

3. **(7p)** Fie ABCDE un pentagon convex și punctele $P\in(DE),Q\in(CD)$ astfel încât $\frac{PE}{PD}=\frac{QC}{QD}=2$. Dacă M și N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și ABE, să se arate că $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.

4. Se consideră triunghiul *ABC* și punctele $N\in(AC),P\in(AB)$ astfel încât $AP=PB, AN=2NC.$ Fie $\{T\}=BN\cap CP$ și $\{M\}=AT\cap BC.$

a) **(3p)** Arătați că $\frac{TM}{AM}=\frac{TN}{BN}<\frac{TP}{CP}.$

b) **(4p)** Arătați că dacă cercul cu centrul în *T* și rază 1 nu se află în interiorul triunghiului *ABC*, atunci există o dreaptă *d* în plan cu proprietatea că proiecția triunghiului *ABC* pe dreapta *d* este un segment de lungime cel mult 4.

.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.