OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2020

Clasa a X-a

1. a) Exprimați numărul $\log_{80} 3072$ în funcție de $a = \log_2 3$ și $b = \log_2 5$.
b) Calculați partea întreagă a numărului real $x = 19 \cdot \log_2 3$.

Ciurcea Raluca

2. Se consideră numerele complexe x, y, z având fiecare modulul egal cu 1 şi expresia $E(x, y, z) = |x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z|$.
a) Demonstraţi că $E(x, y, z) \geq 3$.
b) Aflaţi valoarea maximă a expresiei $E(x, y, z)$.

(***)

3. Fie a, b, c, d patru numere reale astfel încât $a > c > d > b > 1$ și $a \cdot b > c \cdot d$.
Studiaţi injectivitatea functiei $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = a^x + b^x - c^x - d^x$.

(***)

4. Să se rezolve în $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = z \\ 2 \cdot \sqrt{x + y} + \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot z \end{cases}.$$

Benedict G. Niculescu,
Gazeta Matematica nr. 2 / 2019,

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii clasa a X-a

1. a) Folosind formula de schimbare a bazei si regulile de calcul cu logaritmi avem

$$\log_{80} 3072 = \frac{\log_2 3072}{\log_2 80} = \frac{\log_2 3+10}{\log_2 5+4} = \frac{a+10}{b+4}.$$

b) $3072 < 3125 \Leftrightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Longrightarrow 2^{30} \cdot 3 < (5 \cdot 2^4)^5 = 80^5 < 81^5 = 3^{20}$, de unde

$$2^{30} < 3^{19} \Leftrightarrow x = 19 \cdot \log_2 3 > 30$$

Demonstrăm că $x = 19 \cdot \log_2 3 < 31 \Leftrightarrow 3^{19} < 2^{31}$, ceea ce se obține prin înmulțirea inegalităților $(3^5)^3 < (2^8)^3$ și $3^4 < 2^7$.

Astfel că $[x] = 30$.

2. a) Avem inegalitatea :

$|x+y-z| + |x-y+z| \geq |x+y-z+x-y+z| = 2 \cdot |x| = 2$. Scriind și alte două inegalităţi analoage și adunând cele trei inegalităţi se obține prima inegalitate cerută.

b) Vom demonstra că valoarea maximă a lui *E* este 6.

Notăm $s = x+y+z$. Conform inegalității Cauchy – Buniakowski-Schwarz avem:

$(|s-2x| + |s-2y| + |s-2z|)^2 \leq 3 \cdot (|s-2x|^2 + |s-2y|^2 + |s-2z|^2)$

Dar $|s-2x|^2 + |s-2y|^2 + |s-2z|^2 = (s-2x) \cdot (\bar{s} - 2\bar{x}) + (s-2y) \cdot (\bar{s} - 2\bar{y}) + (s-2z) \cdot (\bar{s} - 2\bar{z}) = 3|s|^2 - 2(s \cdot \bar{s} + \bar{s} \cdot s) + 12 = -|s|^2 + 12 \leq 12$. Din ultimele două inegalităţi rezultă $(|s-2x| + |s-2y| + |s-2z|)^2 \leq 3 \cdot 12 = 36$, de unde $E(x,y,z) = |s-2x| + |s-2y| + |s-2z| \leq 6 = E\left(-1, \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, deci $\max E = 6$.

3. Funcția f se scrie succesiv:

$$f(x) = a^x - c^x + b^x - \frac{b^x \cdot a^x}{c^x} + \frac{b^x \cdot a^x}{c^x} - d^x$$

$$= b^x \cdot \left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{c^x}{b^x} + 1 - \frac{a^x}{c^x}\right) + d^x \cdot \left(\frac{b^x \cdot a^x}{c^x \cdot d^x} - 1\right)$$

$$= b^x \cdot \left[\left(\frac{a}{c}\right)^x - 1\right] \cdot \left[\left(\frac{c}{b}\right)^x - 1\right] + d^x \cdot \left[\left(\frac{a \cdot b}{c \cdot d}\right)^x - 1\right]$$

Deci funcția f este o sumă de produse de funcţii strict crescătoare, cu valori pozitive. Aşadar f este o funcţie strict crescătoare, de unde rezultă că f este o funcţie injectivă.

4. Scriind a doua ecuație sub forma $2 \cdot \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+y^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ (1), deducem că dacă $x = 0$, atunci $y = 0$ și $z = 0$.

Aplicând inegalitatea lui Jensen funcţiei concave $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(t) = \sqrt{t}$ obţinem că

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{x+y} \geq \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \geq \frac{x+y}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

Adunând inegalităţile (2) și (3) $\Longrightarrow 2 \cdot \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ (4)

Ridicând la pătrat prima ecuaţie a sistemului $\Longrightarrow \sqrt{x \cdot y} \in \mathbb{N} \Longrightarrow x \cdot y$ este pătrat perfect.

Dacă $x = 1 \Rightarrow y = k^2, k \in \mathbb{N}$ şi (1) nu se verifică. Analog pentru $x = 2$ sau $x = 3$.

Dacă $x \geq 4$ şi $y \geq 4 \Longrightarrow x \geq 2 \cdot \sqrt{x}$ şi $y \geq 2 \cdot \sqrt{y} \Longrightarrow x + y \geq 2 \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ (5)

Din relațiile (4) și (5) $\Longrightarrow 2 \cdot \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+y^2} \geq 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ (6)

Din (1) și (6) $\Longrightarrow x = 2 \cdot \sqrt{x}$ şi $y = 2 \cdot \sqrt{y} \Longrightarrow x = 4$ şi $y = 4 \Longrightarrow z = 4$.

BAREM DE CORECTARE

Clasa a X-a

<table>
<tr><td colspan="2">Problema 1</td></tr>
<tr><td>a) $\log_{80} 3072 = \frac{\log_2 3072}{\log_2 80}$
$= \frac{\log_2 3+10}{\log_2 5+4} = \frac{a+10}{b+4}$
b) $3072 < 3125 \Leftrightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Longrightarrow 2^{30} \cdot 3 < (5 \cdot 2^4)^5 = 80^5 < 81^5 = 3^{20}$,
de unde $2^{30} < 3^{19} \Leftrightarrow\ x = 19 \cdot \log_2 3 > 30$
$(3^5)^3 < (2^8)^3$ și $3^4 < 2^7$
Înmulțind, apoi logaritmând în baza 2, $x < 31. [x] = 31$.</td><td>1p
1p
2p
1p
1p
1p</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td>7p</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema 2</td></tr>
<tr><td>a) Avem inegalitatea :
$|x+y-z| + |x-y+z| \geq |x+y-z+x-y+z| = 2 \cdot |x| = 2$.
Scriind și alte două inegalităţi analoage și adunând cele trei inegalităţi se obţine inegalitatea cerută.
b) Notăm $s = x+y+z$. Conform inegalității Cauchy – Buniakowski-Schwarz avem:
$(|s-2x| + |s-2y| + |s-2z|)^2 \leq 3 \cdot (|s-2x|^2 + |s-2y|^2 + |s-2z|^2)$
Dar $|s-2x|^2 + |s-2y|^2 + |s-2z|^2 = (s-2x) \cdot (\bar{s} - 2\bar{x}) + (s-2y) \cdot (\bar{s} - 2\bar{y}) + (s-2z) \cdot (\bar{s} - 2\bar{z}) = 3|s|^2 - 2(s \cdot \bar{s} + \bar{s} \cdot s) + 12 = -|s|^2 + 12 \leq 12.$
Din ultimele două inegalități rezultă $(|s-2x| + |s-2y| + |s-2z|)^2 \leq 3 \cdot 12 = 36$, de unde $E(x,y,z) = |s-2x| + |s-2y| + |s-2z| \leq 6$
$6 = E\left(-1, \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, deci $\max E = 6$</td><td>1p
1p
1p
2p
1p
1p</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td>7p</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema 3</td></tr>
<tr><td>$f(x) = a^x - c^x + b^x - \frac{b^x \cdot a^x}{c^x} + \frac{b^x \cdot a^x}{c^x} - d^x$
$= b^x \cdot \left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{c^x}{b^x} + 1 - \frac{a^x}{c^x}\right) + d^x \cdot \left(\frac{b^x \cdot a^x}{c^x \cdot d^x} - 1\right)$
$= b^x \cdot \left[\left(\frac{a}{c}\right)^x - 1\right] \cdot \left[\left(\frac{c}{b}\right)^x - 1\right] + d^x \cdot \left[\left(\frac{a \cdot b}{c \cdot d}\right)^x - 1\right]$
Funcția f este o sumă de produse de funcţii strict crescătoare, cu valori pozitive, deci o funcţie strict crescătoare.
Rezultă că f este o funcţie injectivă.</td><td>2p
1p
1p
2p
1p</td></tr>
<tr><td>TOTAL</td><td>7p</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema 4</td></tr>
<tr><td>$2 \cdot \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+y^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})$ (1), deci dacă $x = 0$, atunci $y = 0$ și $z = 0$.
Aplicând inegalitatea lui Jensen funcţiei concave $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(t) = \sqrt{t}$ obţinem succesiv
$\sqrt{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{x+y} \geq \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})$
$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2},\ \sqrt{x^2+y^2} \geq \frac{x+y}{\sqrt{2}}$</td><td>1p</td></tr>
</table>

și sumând $\Longrightarrow 2\cdot \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ (4) Ridicând la pătrat prima ecuaţie a sistemului $\Longrightarrow \sqrt{x\cdot y} \in \mathbb{N} \Longrightarrow x\cdot y$ este pătrat perfect. Dacă $x = 1 \Rightarrow y = k^2, k \in \mathbb{N}$ şi (1) nu se verifică. Analog pentru $x = 2$ sau $x = 3$. Dacă $x \geq 4$ și $y \geq 4 \Longrightarrow x \geq 2\cdot\sqrt{x}$ și $y \geq 2\cdot\sqrt{y} \Longrightarrow x + y \geq 2\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ (5) Din relațiile (4) și (5) $\Longrightarrow 2\cdot \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+y^2} \geq 2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ (6) Din (1) și (6) $\Longrightarrow x = 2\cdot\sqrt{x}$ și $y = 2\cdot\sqrt{y} \Longrightarrow x = 4$ şi $y = 4 \Longrightarrow z = 4$.	2p 1p 1p 1p 1p
TOTAL	**7p**