OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2020

Clasa a XI-a

1. a)Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.Să se determine matricea $A^n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin condițiile $x_1 = 1,\ x_{n-1} = \frac{x_n}{1-x_n}, (\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln x_n + \frac{1}{n}\cdot \ln n!\right)$.

Cristian Moanță

2. Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice care verifică relația $X^3 + X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $\det(X^2 + I_2) > 0$.
b) Să se determine matricea X.

Cătălin Spiridon

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 \in (0,1)$ și $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$, pentru $n \geq 1$. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n$.

Laurențiu Panaitopol G.M. nr. 11/2019

4. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k}{n^2} + \cos\frac{\sqrt{k}}{n}\right)$.

Cătălin Spiridon

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii clasa a XI-a

1. a) Avem

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&\sin\frac{\pi}{4}&0\\-\sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$ și prin

inducție matematică se arată că $A^n=(\sqrt{2})^n\cdot\begin{pmatrix}\cos(n\frac{\pi}{4})&\sin(n\frac{\pi}{4})&0\\-\sin(n\frac{\pi}{4})&\cos(n\frac{\pi}{4})&0\\0&0&(\frac{\sqrt{2}}{2})^n\end{pmatrix}$.

b) Relația de recurență se scrie: $\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_{n-1}}+1,\ (\forall)\,n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$. Cum $x_1=1>0$, prin inducție concluzionăm că $x_n>0,\ (\forall)\,n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$.

Din $\frac{1}{x_k}=\frac{1}{x_{k-1}}+1,\ (\forall)\,k\in\mathbb{N},\ k\geq 2$, dând valori lui k, obținem:

$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_1}+n-1 \iff x_n=\frac{1}{n}$.

Limita din enunț se scrie:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n+\frac{1}{n}\cdot\ln n!\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\ln n!\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{n}\cdot\sqrt[n]{n!}\right)=\ln\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

Folosind criteriul raportului obținem $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{1}{e}$.

Concluzie:

$\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n+\frac{1}{n}\cdot\ln n!\right)=\ln\frac{1}{e}=-1.$

2.

a) Deoarece $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\Longrightarrow$

$$\det(X^2+I_2)=\det[(X+i\cdot I_2)(X-i\cdot I_2)]=\det(X+i\cdot I_2)\cdot\det(X-i\cdot I_2)=$$
$$=\det(X+i\cdot I_2)\cdot\det(\overline{X+i\cdot I_2})=\det(X+i\cdot I_2)\cdot\overline{\det(X+i\cdot I_2)}\geq 0.(1)$$

Dacă $\det(X^2+I_2)=0\Longrightarrow\det(X+i\cdot I_2)=0$.

Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\Longrightarrow\det(X+i\cdot I_2)=\begin{vmatrix}a+i&b\\c&d+i\end{vmatrix}=$

$= ad + i(a+d) - 1 - bc = 0$ și deci $\det X = ad - bc = 1$ și $Tr(X) = 0$. Conform relației Cayley-Hamilton, obținem că $X^2 + I_2 = O_2$ ceea ce este fals deoarece $X^3 + X = X(X^2 + I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ și deci, $\det(X^2 + I_2) \neq 0$. (1)

Din (1) și (2) rezultă că $\det(X^2 + I_2) > 0$.

b)

$X^3 + X = X(X^2 + I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X^3 + X) = \det X \cdot \det(X^2 + I_2) = 0$

însă $\det(X^2 + I_2) \neq 0 \Rightarrow \det X = 0$ și conform relației Cayley-Hamilton, rezultă că $X^2 = tr(X) \cdot X \Rightarrow X^3 = (tr(X))^2 \cdot X \Rightarrow X^3 + X = (tr^2 X + 1) \cdot X \Rightarrow$

$\Rightarrow tr(X^3 + X) = (tr^2 X + 1) \cdot trX = tr^3 X + trX$.

$X^3 + X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(X^3 + X) = 10$ și deci, $tr^3 X + trX = 10$ de unde $trX = 2$

deoarece funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = t^3 + t$ este strict crescătoare, deci injectivă și ecuația $f(t) = 10$ are soluția unică $t = 2$.

Deci, $X^3 + X = (tr^2 X + 1) \cdot X = 5 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

3.

a) Prin metoda inducției matematice, se arată că $a_n \in (0,1)$, orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $a_n \in (0,1)$, conform inegalității lui Bernoulli, avem că

$a_{n+1} = 2^{a_n} - 1 = (1+1)^{a_n} - 1 \leq 1 + a_n - 1 = a_n$ și deci, șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător și mărginit, deci convergent.

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$. Prin trecere la limită în relația de recurență, obținem că

$l = 2^l - 1$, ecuație care are doar soluțiile $l_1 = 0$ și $l_2 = 1$ deoarece funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(l) = 2^l - 1$ este convexă, iar funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(l) = l$ este liniară.
Deoarece $a_n \in (0,1)$ și este descrescător, avem că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \ln 2$.

c) Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}, x_n = n \cdot a_n$, $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$x_n > 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln 2 < 1$ și deci, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

4. Fie șirul $a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k}{n^2} + \cos\frac{\sqrt{k}}{n}\right), n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow a_n = e^{\ln \prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k}{n^2}+\cos\frac{\sqrt{k}}{n}\right)}$

$\Longrightarrow a_n = e^{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sin\frac{k}{n^2}+\cos\frac{\sqrt{k}}{n}\right)}$.

$f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(\sin x + \cos\sqrt{x}) \Longrightarrow$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(\sin x + \cos\sqrt{x})}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{\ln(\sin x + \cos\sqrt{x})}{\sin x + \cos\sqrt{x} - 1} \cdot (\sin x + \cos\sqrt{x} - 1)}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x + \cos\sqrt{x} - 1}{x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice

$x \in (0, \delta_\varepsilon)$ să avem $\left|\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Longrightarrow (\frac{1}{2} - \varepsilon)x < f(x) < (\frac{1}{2} + \varepsilon)x.(1)$

Deoarece $\frac{1}{n} \to 0$, există $n_\varepsilon \geq 1$ astfel încît $0 < \frac{1}{n} < \delta_\varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$.

Pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, avem $0 < \frac{k}{n^2} < \frac{1}{n} < \delta_\varepsilon$ pentru orice $k = \overline{1, n}$.

Folosind relația (1) pentru $x = \frac{k}{n^2}$, obținem că $(\frac{1}{2} - \varepsilon)\frac{k}{n^2} < f(\frac{k}{n^2}) < (\frac{1}{2} + \varepsilon)\frac{k}{n^2} \Longrightarrow$

$$(\frac{1}{2} - \varepsilon)\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} < \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) < (\frac{1}{2} + \varepsilon)\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \Longrightarrow \left|\frac{\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})}{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)}{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$, obținem că $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{4}$.

Deci, $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{4}}$.

BAREM DE CORECTARE

Clasa a XI-a

Problema 1

a) $A = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$	1p
$A^n = (\sqrt{2})^n \cdot \begin{pmatrix} \cos(n\frac{\pi}{4}) & \sin(n\frac{\pi}{4}) & 0 \\ -\sin(n\frac{\pi}{4}) & \cos(n\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{\sqrt{2}}{2})^n \end{pmatrix}$	2p
b)Relația de recurență se scrie: $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + 1,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Cum $x_1 = 1 > 0$, prin inducție concluzionăm că $x_n > 0,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.	1p
Din $\frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_{k-1}} + 1,\ (\forall)\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$, dând valori lui k, obținem: $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_1} + n - 1 \iff x_n = \frac{1}{n}$.	1p
Limita din enunț se scrie: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln x_n + \frac{1}{n}\cdot \ln n!\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot \ln n!\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{n}\cdot \sqrt[n]{n!}\right) = \ln \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.	1p
Folosind criteriul raportului obținem $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$.	
Concluzie: $\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n + \frac{1}{n}\cdot \ln n!\right) = \ln\frac{1}{e} = -1$.	1p
TOTAL	**7 p**

Problema 2

a) $\det(X^2 + I_2) \geq 0$	1p
$\det(X^2 + I_2) \neq 0$	1p
b) $\det X = 0$	1p
$X^3 = (tr(X))^2 \cdot X$	1p
$tr(X^3 + X) = tr^3 X + trX$	1p
$trX = 2$	1p
Finalizare : $X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$	1p
TOTAL	**7 p**

Problema 3

a)	$a_n \in (0,1)$, orice $n \in \mathbb{N}^*$	1p
	$a_{n+1} \le a_n$	1p
	$l = 2^l - 1$ are doar soluțiile $l_1 = 0$ și $l_2 = 1$	1p
	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	1p
b)	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{a_n}-1}{a_n} = \ln 2$	1p
c)	$x_n = n \cdot a_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$	1p
Finalizare :	$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$	1p
TOTAL		**7 p**

Problema 4

$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{k}{n^2} + \cos \frac{\sqrt{k}}{n}\right) = e^{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sin \frac{k}{n^2} + \cos \frac{\sqrt{k}}{n}\right)}$	1p
$f(x) = \ln(\sin x + \cos \sqrt{x}) \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$	1p
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}} = \frac{1}{2}$	2p
$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$	1p
$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{4}$	1p
Finalizare : $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{4}}$	1p
TOTAL	**7p**