OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2020

Clasa a XII-a

1. a) Demonstrați că pentru orice număr real x are loc relația: $e^x \geq x + 1$.

b) Demonstrați inegalitatea $\int_0^1 \sqrt{x \cdot e^{-x^2}}\, dx < \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

(***)

2. Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \cdot \int_1^n \frac{\ln x}{x^2+n}\, dx = \frac{\pi}{4}$.

Traian Tămâian, Satu Mare
Gazeta Matematică seria B, nr. 9/2019

3. a) Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ care verifică relația $\varepsilon^3 = 1$. Demonstrați că numărul $(a + b \cdot \varepsilon) \cdot (a - b - b \cdot \varepsilon)$ este real pentru oricare $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că mulțimea $M = \{a^2 - ab + b^2 | a, b \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea.

Variante Bacalaureat 2009

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu n elemente, unde $n = 12k + 10, k \in \mathbb{N}$. Știind că aplicația $f: G \to G, f(x) = x^4$ este morfism de grupuri, arătați că grupul este abelian.

Generalizarea unei probleme de *Ovidiu Munteanu*,
MATEMATICĂ pentru grupele de performanță,
2004

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7puncte.
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii clasa a XII-a

1. a) Demonstrăm că minimul funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = e^x - x - 1$ este egal cu 0.

$g': \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g'(x) = e^x - 1$. Avem

x	$-\infty \qquad 0 \qquad +\infty$
$g'(x)$	$- - - - - - - -0 + + + + + + + +$
$g(x)$	↘↘↘↘↘↘↘↘↘ 0 ↗↗↗↗↗↗↗↗↗

b) Aplicând forma integrală a inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem $\int_0^1 \sqrt{x \cdot e^{-x^2}}\, dx \le \sqrt{\int_0^1 x\, dx \cdot \int_0^1 e^{-x^2}\, dx}$. (1)

Folosim inegalitatea $e^x \ge x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ pentru a obține $e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$. Integrând pe intervalul $[0,1]$ rezultă $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \le \frac{\pi}{4}$. Cum $\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$, ținând cont și de relația (1), avem $\int_0^1 \sqrt{x \cdot e^{-x^2}}\, dx \le \sqrt{\int_0^1 x\, dx \cdot \int_0^1 e^{-x^2}\, dx} \le \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

2. Cu schimbarea de variabilă $x = \frac{n}{y}$ obținem $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2+n} dx = \int_1^n \frac{\ln n - \ln y}{y^2+n} dy =$
$= \int_1^n \frac{\ln n}{x^2+n} dx - \int_1^n \frac{\ln x}{x^2+n} dx$, de unde $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2+n} dx = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} \cdot \left(\text{arctg}\sqrt{n} - \text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Prin urmare avem de calculat valoarea limitei
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \cdot \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} \cdot \left(\text{arctg}\sqrt{n} - \text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\text{arctg}\sqrt{n} - \text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

3. a) Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ cu $\varepsilon^3 = 1$. Atunci $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0, \varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$. Atunci avem
$(a + b \cdot \varepsilon)(a - b - b \cdot \varepsilon) = (a + b\varepsilon) \cdot (a + b\varepsilon^2) = (a + b\varepsilon) \cdot \overline{(a + b\varepsilon)} = |a + b\varepsilon|^2 \in \mathbb{R}$.
b) Oricare ar fi $x, y \in M$ rezultă că există $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = a^2 - ab + b^2 =$
$= |a + b\varepsilon|^2$ și $y = c^2 - cd + d^2 = |c + d\varepsilon|^2$.
Produsul este $x \cdot y = |(a + b\varepsilon) \cdot (c + d\varepsilon)|^2 = |ac + (ad + bc)\varepsilon + bd\varepsilon^2|$, de unde, dacă ținem seama că $\varepsilon^2 = -\varepsilon - 1$, avem $x \cdot y = |ac - bd + (ad + bc - bd)\varepsilon|^2 =$
$= (ac - bd)^2 - (ac - bd) \cdot (ad + bc - bd) + (ad + bc - bd)^2$ care aparține lui M deoarece $ac - bd, ad + bc - bd \in \mathbb{Z}$.

4. Cum $ord\ G = n = 12k + 10, k \in \mathbb{N}$ conform teoremei lui Lagrange deducem că pentru oricare $x \in G$, $x^{12k+10} = e$, unde cu e am notat elementul neutru al grupului dat. De aici $x^{12k+12} = x^2, x^{12k+9} = x^{-1}, \forall x \in G$.(1)
Știind că aplicația $f: G \to G, f(x) = x^4$ este morfism de grupuri, deducem succesiv că pentru oricare $x, y \in G$ au loc relațiile:
$(xy)^4 = x^4y^4 \Rightarrow (yx)^3 = x^3y^3 \Rightarrow (yx)^4 = yx^4y^3 \Rightarrow y^4x^4 = yx^4y^3 \Rightarrow y^3x^4 = x^4y^3$,
prin urmare, ținând cont și de relația (1), avem
$x^2y^{-1} = x^{12k+12}y^{12k+9} = (x^{3k+3})^4(y^{4k+3})^3 = (y^{4k+3})^3(x^{3k+3})^4 = y^{-1}x^2$.
Înmulțind la stânga și la dreapta cu y rezultă $x^2y = yx^2, \forall x, y \in G$, deci pătratele comută cu toate elementele grupului. Atunci pentru oricare $x, y \in G$:
$$(xy)^2 = (xy)^{12k+12} = [(xy)^4]^{3k+3} = (x^4y^4)^{3k+3} = x^4y^4x^4y^4 \ldots x^4y^4 =$$
$$= x^{12k+12}y^{12k+12} = x^2y^2,$$
de unde, înmulțind la stânga cu x^{-1} și la dreapta cu y^{-1} ajungem la $xy = yx$, așadar grupul este abelian.

BAREM DE CORECTARE

Clasa a XII-a

Problema 1	
a)Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^x-x-1$ derivabilă, $g':\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g'(x)=e^x-1$.	1p
x: $-\infty$ … 0 … $+\infty$; $g'(x)$: $- - - - - - - -0 + + + + + + + +$; $g(x)$: $\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\ 0\ \nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	1p
b)Aplicând forma integrală a inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem $\int_0^1 \sqrt{x\cdot e^{-x^2}}\,dx \le \sqrt{\int_0^1 x\,dx\cdot\int_0^1 e^{-x^2}\,dx}.\ (1)$	1p
Din $e^x\ge x+1, \forall x\in\mathbb{R}$ rezultă $e^{-x^2}\le\frac{1}{x^2+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.	1p
Integrând pe intervalul $[0,1]$ rezultă $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le\frac{\pi}{4}$.	1p
$\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$,	1p
Din (1), avem $\int_0^1\sqrt{x\cdot e^{-x^2}}\,dx\le\sqrt{\int_0^1 x\,dx\cdot\int_0^1 e^{-x^2}\,dx}\le\sqrt{\frac{\pi}{8}}$.	1p
TOTAL	**7p**

Problema 2	
Schimbarea de variabilă $x=\frac{n}{y}\Rightarrow\int_1^n\frac{\ln x}{x^2+n}dx=\int_1^n\frac{\ln n}{y^2+n}dy-\int_1^n\frac{\ln y}{y^2+n}dy$, de unde $\int_1^n\frac{\ln x}{x^2+n}dx=\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\sqrt{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	4p
$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\cdot\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\sqrt{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\operatorname{arctg}\sqrt{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{\pi}{4}$	3p
TOTAL	**7p**

Problema 3	
a)Fie $\varepsilon\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ cu $\varepsilon^3=1$. Atunci $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0, \varepsilon^2=\bar{\varepsilon}$.	1p
$(a+b\cdot\varepsilon)(a-b-b\cdot\varepsilon)=(a+b\varepsilon)\cdot(a+b\varepsilon^2)=$ $=(a+b\varepsilon)\cdot\overline{(a+b\varepsilon)}=\lvert a+b\varepsilon\rvert^2\in\mathbb{R}, \forall a,b\in\mathbb{R}$	2p
b)Oricare ar fi $x,y\in M$ există $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x=a^2-ab+b^2=\lvert a+b\varepsilon\rvert^2$ și $y=c^2-cd+d^2=\lvert c+d\varepsilon\rvert^2$.	1p
$x\cdot y=\lvert(a+b\varepsilon)\cdot(c+d\varepsilon)\rvert^2=\lvert ac+(ad+bc)\varepsilon+bd\varepsilon^2\rvert$, de unde, dacă ținem seama că $\varepsilon^2=-\varepsilon-1$, avem $x\cdot y=\lvert ac-bd+(ad+bc-bd)\varepsilon\rvert^2=(ac-bd)^2-(ac-bd)\cdot(ad+bc-bd)+(ad+bc-bd)^2$	1p
care aparține lui M deoarece $ac-bd, ad+bc-bd\in\mathbb{Z}$.	2p
TOTAL	**7p**

Problema 4	
$ord\ G = n = 12k + 10, k \in \mathbb{N}$ conform teoremei lui Lagrange $\Rightarrow \forall x \in G,\ x^{12k+10} = e$, e elementul neutru al lui G. De aici $x^{12k+12} = x^2, x^{12k+9} = x^{-1}, \forall x \in G$.(1) $f: G \to G, f(x) = x^4$ morfism de grupuri, deci $\forall x, y \in G$ $(xy)^4 = x^4y^4 \Rightarrow (yx)^3 = x^3y^3 \Rightarrow (yx)^4 = yx^4y^3 \Rightarrow y^4x^4 = yx^4y^3 \Rightarrow$ $y^3x^4 = x^4y^3$, apoi $x^2y^{-1} = x^{12k+12}y^{12k+9} = (x^{3k+3})^4(y^{4k+3})^3 = (y^{4k+3})^3(x^{3k+3})^4 =$ $y^{-1}x^2$, deci $x^2y = yx^2, \forall x, y \in G$. $(xy)^2 = (xy)^{12k+12} = [(xy)^4]^{3k+3} = (x^4y^4)^{3k+3} = x^4y^4x^4y^4 \dots x^4y^4 =$ $= x^{12k+12}y^{12k+12} = x^2y^2 \Rightarrow xy = yx, \forall x, y \in G$	 1p 1p 1p 2p 2p
TOTAL	**7p**