OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2020

Clasa a IX-a

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale astfel încât $a_1 = 1$.
a) Arătaţi că există $k > 1$ astfel încât a_k să fie pătrat perfect.
b) Arătaţi că progresia conţine o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte.
c) Daţi un exemplu de progresie aritmetică de numere naturale care nu conţine niciun pătrat perfect.

2. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \frac{1}{4}$ şi $\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} = \frac{2}{n^2+2n}, n \geq 1$.
Să se arate că $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)x_k < 1$, oricare ar fi $n \geq 1$.

Traian Tămâian,

G.M. nr. 11/2019

3. Fie $x, y, z > 0$. Demonstrați că

$$\frac{x^3+3}{y+z} + \frac{y^3+3}{z+x} + \frac{z^3+3}{x+y} \geq \frac{9}{2} \cdot \frac{x+y+z+1}{x+y+z}.$$

Cătălin Cristea

4. Fie ABC un triunghi, D piciorul înălțimii din A, G centrul de greutate al triunghiului ABC și S piciorul bisectoarei din D în triunghiul ADB. Dreapta SG taie latura AC în punctul T. Să se arate că $AD = BC$ dacă și numai dacă $\sphericalangle ADT \equiv \sphericalangle TDC$.

Romanța Ghiță și Ioan Ghiță, Blaj
Gazeta Matematică seria B, nr. 9/2019

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii clasa a IX-a

1. a) Cum $r = a_2 - a_1, a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, deducem că raţia r este un număr natural.
Luăm $k = r + 3$ şi obţinem $a_k = (r+1)^2$, care este pătrat perfect.
b) Pentru orice număr natural m, luând $k = m^2 r + 2m + 1$ avem $a_k = 1 + (k-1)r = m^2 r^2 + 2mr + 1 = (mr+1)^2$, de unde rezultă că progresia conţine o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte.
c) Ştiind că orice pătrat perfect este de forma $3A$ sau $3A + 1$, este suficient să luăm progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = 3n + 2, n \in \mathbb{N}$.

2. Demonstrăm prin inducţie matematică: $x_n = \frac{1}{n^2 \cdot (n+1)^2}, \forall n \geq 1$.

Etapa de verificare: $x_1 = \frac{1}{4} = \frac{1}{1^2 \cdot (1+1)^2}$, adevărat.

Etapa de demonstraţie: presupunem că $x_n = \frac{1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$ şi demonstrăm că $x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}$.

Avem: $\sqrt{x_{n+1}} = \frac{2}{n^2+2n} - \sqrt{x_n} = \frac{2}{n^2+2n} - \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$, deci $x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}$.

Cum ambele etape ale inducţiei sunt verificate, rezultă că $x_n = \frac{1}{n^2 \cdot (n+1)^2}, \forall n \geq 1$.

Obţinem că $\sum_{k=1}^{n} (2k+1) x_k = \sum_{k=1}^{n} (2k+1) \cdot \frac{1}{k^2 \cdot (k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$.

3. Inegalitatea se scrie echivalent:

$$\left(\frac{x^3+2}{y+z} + \frac{y^3+2}{z+x} + \frac{z^3+2}{x+y}\right) + \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) \geq \frac{9}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x+y+z}$$

Dar $x^3 + 2 \geq 3x, \forall x > 0$, ea fiind echivalentă cu $(x-1)^2(x+2) \geq 0$.

Rezultă $\frac{x^3+2}{y+z} + \frac{y^3+2}{z+x} + \frac{z^3+2}{x+y} \geq 3\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right)$. Cu notațiile $y + z = a > 0, z + x = b > 0$ și $x + y = c > 0$ avem $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 3\right) \geq \frac{1}{2} \cdot (6-3) \geq \frac{3}{2}$,

deci $\frac{x^3+2}{y+z} + \frac{y^3+2}{z+x} + \frac{z^3+2}{x+y} \geq 3\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right) \geq \frac{3}{2}$. (1)

Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski, forma Titu Andreescu, avem:

$\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{(1+1+1)^2}{2(x+y+z)} = \frac{9}{2(x+y+z)}$.(2)

Adunând relațiile (1) și (2) obținem concluzia.

4. Notăm $AD = x, BD = y, DC = z, \frac{AT}{TC} = \alpha$. Din teorema bisectoarei în triunghiul *ADB*, $\frac{AS}{SB} = \frac{x}{y}$, deci $\overrightarrow{AS} = \frac{x}{y} \cdot \overrightarrow{SB}$ și atunci $\overrightarrow{GS} = \frac{y \cdot \overrightarrow{GA} + x \cdot \overrightarrow{GB}}{x+y}$. (1)
Din relația $\frac{AT}{TC} = \alpha$ deducem că $\overrightarrow{GT} = \frac{\overrightarrow{GA} + \alpha \cdot \overrightarrow{GC}}{1+\alpha}$ și, cum *G* este centrul de greutate al triunghiului ABC, obținem $\overrightarrow{GT} = \frac{(1-\alpha)\cdot\overrightarrow{GA} - \alpha \cdot \overrightarrow{GB}}{1+\alpha}$.(2)

Vectorii $\overrightarrow{GS}$ și $\overrightarrow{GT}$ sunt coliniari, iar vectorii $\overrightarrow{GA}$ și $\overrightarrow{GB}$ necoliniari, deducem astfel din relațiile (1) și (2) că $\frac{y}{1-\alpha} = \frac{x}{-\alpha}$, de unde $\alpha = \frac{x}{x-y}$.(3)

Dacă $AD = BC$ rezultă succesiv că $x - y = z$, $\alpha = \frac{x}{z}$ și, din reciproca teoremei bisectoarei în triunghiul *ADC*, $\sphericalangle ADT \equiv \sphericalangle TDC$.

Reciproc, dacă $\sphericalangle ADT \equiv \sphericalangle TDC$, folosind teorema bisectoarei în triunghiul *ADC* și relația (3) rezultă că $\alpha = \frac{x}{z} = \frac{x}{x-y}$ de unde $x - y = z$, adică $AD = BC$.

BAREM DE CORECTARE

Clasa a IX-a

Problema 1	
a) Raţia r este un număr natural. Pentru $k = r + 3$obţinem $a_k = (r+1)^2$, care este pătrat perfect b) Pentru orice număr natural m, luând $k = m^2r + 2m + 1$ avem $a_k = 1 + (k-1)r = m^2r^2 + 2mr + 1 = (mr+1)^2$, care este pătrat perfect c) Ştiind că orice pătrat perfect este de forma $3A$ sau $3A + 1$, este suficient să luăm, de exemplu, progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = 3n + 2, n \in \mathbb{N}$. (Orice alt exemplu corect se punctează cu 2p)	1p 2p 2p 2p
TOTAL	**7p**
Problema 2	
Demonstrarea relaţiei $x_n = \frac{1}{n^2\cdot(n+1)^2}, \forall n \geq 1$ Finalizare: $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)x_k = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)\cdot\frac{1}{k^2\cdot(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1.$	4p 3p
TOTAL	**7p**
Problema 3	
$x^3 + 2 \geq 3x, \forall x > 0$, fiind echivalentă cu $(x-1)^2(x+2) \geq 0$. Rezultă $\frac{x^3+2}{y+z} + \frac{y^3+2}{z+x} + \frac{z^3+2}{x+y} \geq 3\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right)$. Cu notațiile $y + z = a > 0, z + x = b > 0, x + y = c > 0$ avem $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 3\right) \geq \frac{1}{2}\cdot(6-3) \geq \frac{3}{2}$, deci $\frac{x^3+2}{y+z} + \frac{y^3+2}{z+x} + \frac{z^3+2}{x+y} \geq 3\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right) \geq \frac{3}{2}$. (1) Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski, forma Titu Andreescu, avem: $\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{(1+1+1)^2}{2(x+y+z)} = \frac{9}{2(x+y+z)}$.(2) Adunând relațiile (1) și (2) obținem concluzia.	 2p 2p 2p 1p
TOTAL	**7p**
Problema 4	
Fie $AD = x, BD = y, DC = z, \frac{AT}{TC} = \alpha$. Din teorema bisectoarei în triunghiul ADB, $\frac{AS}{SB} = \frac{x}{y}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{x}{y}\cdot\overrightarrow{SB}$ și $\overrightarrow{GS} = \frac{y\cdot\overrightarrow{GA} + x\cdot\overrightarrow{GB}}{x+y}$. (1) $\overrightarrow{GT} = \frac{\overrightarrow{GA} + \alpha\cdot\overrightarrow{GC}}{1+\alpha}$ și $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ implică $\overrightarrow{GT} = \frac{(1-\alpha)\cdot\overrightarrow{GA} - \alpha\cdot\overrightarrow{GB}}{1+\alpha}$.(2) $\overrightarrow{GS} \parallel \overrightarrow{GT}$, $\overrightarrow{GA} \nparallel \overrightarrow{GB}$, deducem din (1) și (2) că $\frac{y}{1-\alpha} = \frac{x}{-\alpha}$, deci $\alpha = \frac{x}{x-y}$.(3) Dacă $AD = BC \Longrightarrow x - y = z$, $\alpha = \frac{x}{z}$ și, din reciproca teoremei bisectoarei în triunghiul *ADC*, $\sphericalangle ADT \equiv \sphericalangle TDC$. Reciproc, dacă $\sphericalangle ADT \equiv \sphericalangle TDC$, cu teorema bisectoarei în triunghiul *ADC* și relația (3) rezultă că $\alpha = \frac{x}{z} = \frac{x}{x-y}$ de unde $x - y = z$, adică $AD = BC$.	2p 2p 1p 1p 1p
TOTAL	**7p**