OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
8 februarie 2020

CLASA A XI-A

1.) Rezolvați în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația matriceală $X^2 = A$, unde $A = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.) Considerăm matricea $A \in M_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $\det\left(A^2 - 2020I_2\right) = 0$.

Demonstrați că $A^2 = 2020I_2$ și $\det(A) = -2020$.

3.) Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 15$ și $x_{n+1} = \dfrac{5 + x_n^2}{2x_n}, n \geq 1$.

Studiați convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ și calculați limita sa.

4.) Fie șirul de numere $(a_n)_{n\geq 1}$ dat prin relația de recurență

$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot (a_{n+2} - a_{n+1})}, n \geq 1$, unde $a_1 = 1, a_2 = 2$.

a) Determinați termenul general al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{a_n}}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore