OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
8 februarie 2020

CLASA A XII-A

1.) Pe mulțimea $\mathbb{C}$, fie definită operația $x \circ y = xy + \alpha(x+y) + 2\alpha,\ \forall x, y \in \mathbb{C}$ și $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

a) Să se determine $\alpha,$ astfel încât operația să aibă element neutru!

b) Folosind rezultatul de la punctul a), să se rezolve pe mulțimea numerelor complexe ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2n-ori} = 2(x+3)^n, n \in \mathbb{N}^*$!

2.) Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel, încât funcțiile $f, g : G \to G, f(x) = x^n$ și $g(x) = x^{n+1}$ sunt morfisme surjective de grup, atunci să se demonstreze că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

3.) Se dau funcțiile: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ și $g(x) = x \cdot e^{2-x}$. Să se demonstreze că funcția $h : [0,4] \to \mathbb{R}, h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ admite primitive și să se găsească o primitivă a funcției h al cărei grafic trece prin punctul de coordonate $\left(3; 4 - \frac{4}{e}\right)$.

4.) Să se determine funcția derivabilă $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ știind că $f'(x) = f(x) + \frac{f(x)}{x} + e^x$, pentru orice $x > 0$ și $f(1) = e$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore