

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

8 februarie 2020

CLASA A IX-A

1.) Rezolvați ecuația:

$$\left[\frac{x^2 + x}{2} + 2019 \right] = |x + 2020|, \text{ unde } [a] \text{ reprezintă partea întreagă a numărului real } a$$

și $|a|$ modulul lui.

2.) Arătați că pentru orice număr natural n , $n \geq 2$ numărul $\sqrt{2020^n - 2021}$ nu este natural.

3.) Demonstrați următoarele inegalități:

a) $\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{a^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$

b) $\frac{x^{2020} + y^{2020}}{z^{3030}} + \frac{y^{2020} + z^{2020}}{x^{3030}} + \frac{z^{2020} + x^{2020}}{y^{3030}} \geq 2 \left(\frac{1}{x^{1010}} + \frac{1}{y^{1010}} + \frac{1}{z^{1010}} \right), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^*$

4.) Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-un cerc. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC , BCD , CDE respectiv ACE . Arătați că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore