Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 13 februarie 2020

Clasa a VIII-a

1. **a)** Arătați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=\left(x^2+3x+1\right)^2$.

b) Demonstrați că $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}-3\right)+1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+2\right)\left(\sqrt{2}+3\right)+1}=\left(\sqrt{2}-1\right)^4$.

2. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AB \perp CD$. Fie M mijlocul muchiei BC și N mijlocul muchiei BD.

Pe semidreapta $(DM$ alegem punctul E astfel încât $DE = 2 \cdot DM$, iar pe semidreapta $(CN$ alegem punctul F astfel încât $CF = 2 \cdot CN$.

a) Demonstraţi că punctele F, B și E sunt coliniare;

b) Demonstraţi că triunghiul AEF este isoscel.

3. În interiorul unui pătrat de latură 6 sau pe laturile acestuia, se consideră 13 puncte diferite, oricare trei necoliniare. Demonstraţi că putem alege trei puncte care să formeze un triunghi cu aria mai mică sau egală cu 3.

4. Dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $x^2+4y^2+9z^2+20=4x+12y+24z$,

demonstrați că $x \in [-1,5]$, $y \in [0,3]$ și $z \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{3}\right]$.

Gazeta Matematică – nr. 12/2019

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.