OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020
Clasa a IX-a

SUBIECTUL I

Determinați $x \in \mathbf{R}$ astfel încât $\left[x^2\right] \cdot \left\{1 + x^2\right\} = x^2 - 1$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă respectiv partea fracționară a numărului a.

*****

SUBIECTUL II

Fie $a, b, c \in [1, +\infty)$. Arătați că $\dfrac{a}{a+2\sqrt{b}+c} + \dfrac{b}{b+2\sqrt{c}+a} + \dfrac{c}{c+2\sqrt{a}+b} \geq \dfrac{3}{4}$.

Alexandru Cărnaru

SUBIECTUL III

Fie $a, b, c \in \mathbf{Q}^*$. Să se arate că tripletul $\left(c,\ a+b,\ 2c+\dfrac{ab}{c}\right)$ **nu** poate forma o progresie geometrică.

Nelu Chichirim

SUBIECTUL IV

Pe laturile triunghiului *ABC* se construiesc, în exterior, pătratele *ABDE*, *ACFG* și *BCHI*. Să se arate că:

a) Dacă *M* este ales astfel încât *BIMD* să fie paralelogram, atunci *BMAG* este paralelogram.

b) Triunghiurile *ABC* și *DGH* au același centru de greutate.

c) Cu segmentele *CD*, *AH* și *BG* se poate construi un triunghi.

Cătălin Zîrnă

Notă:

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020
Clasa a X-a

SUBIECTUL I
Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $9^x + 40^x = 24^x + 25^x$.

* * *

SUBIECTUL II
Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația:

$$\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{7x+2}\cdot\sqrt{8x+4}+\sqrt{11x+6}\cdot\sqrt{12x+12}=\sqrt{(19x+9)(21x+18)}.$$

Cristina Homentcovschi

SUBIECTUL III
Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Demonstrați echivalența:

$$\left|(z-z_1)(z-z_2)\right| \le 1,\ \forall z \in \mathbf{C},\ |z|=1 \Leftrightarrow z_1 = z_2 = 0.$$

Nelu Chichirim

SUBIECTUL IV
Fie M o mulțime de numere naturale nenule cu cel puțin două elemente și o funcție bijectivă $f: M \to M$. Arătați că nu există funcțiile $g, h: M \to M$ astfel încât g să fie injectivă, h să fie surjectivă și $f(n) = g(n)h(n)$ pentru orice $n \in M$.

Cătălin Zîrnă

Notă:
Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020
Clasa a XI-a

SUBIECTUL I

Fie $A, B \in M_3(\mathbf{R})$ astfel încât $X \cdot (AB - BA) = (AB - BA) \cdot X$, $\forall X \in M_3(\mathbf{R})$. Arătați că $AB = BA$.

Gabriela Constantinescu

SUBIECTUL II

Fie $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ două matrice care nu comută. Știind că există $p, q, r \in \mathbf{R}^*$ astfel încât $p \cdot AB + q \cdot BA = I_n$ și $A^2 = r \cdot B^2$, demonstrați că $p = q$.

* * *

SUBIECTUL III

Fie șirul $(a_n)_{n\ge 2}$ definit prin $a_n = \sqrt[n]{n!} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - arctg \sqrt[n]{2020} \right)$, $\forall n \in \mathbf{N}, n \ge 2$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL IV

Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ astfel încât $a_n \ge 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$ și $a_{n+1} \le \max\left\{ a_n, \frac{1}{n} \right\}, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Arătați că $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent.

Nelu Chichirim

Notă:

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANŢA, 08.02.2020
Clasa a XII-a

SUBIECTUL I

Fie $G_p=\left\{\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{a} & \hat{b}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \middle| \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}\in \mathbf{Z}_p\right\}$ unde $p\geq 3$ este un număr natural impar.

a) Arătați că oricare ar fi $A, B\in G_p$ avem că $AB\in G_p$.

b) Arătați că $(G_p, \cdot)$ este un grup necomutativ, unde operația este înmulțirea matricelor.

Arătați că p este prim dacă și numai dacă $ord(A)=p$ pentru orice matrice $A\in G_p$, $A\neq I$ unde $I=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$

* * *

SUBIECTUL II

Fie $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ două grupuri. Pe mulțimea $G_1\times G_2$ definim operația $"\cdot"$ prin $(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2)=(a_1\cdot a_2, b_1\cdot b_2), \forall (a_1, b_1),(a_2, b_2)\in G_1\times G_2$ (produsul direct). Presupunem cunoscut faptul că $(G_1\times G_2, \cdot)$ este un grup.

Arătați că:

a) $(\mathbf{C}, +)$ este izomorf cu $(\mathbf{R}_+^*\times \mathbf{R}_+^*, \cdot)$

b) $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ **nu** este izomorf cu $(\mathbf{R}^*\times \mathbf{R}^*, \cdot)$

Nelu Chichirim

SUBIECTUL III

Calculați $\lim\limits_{a\to\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}dx$.

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_n=\int_0^{2\pi}\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx\,dx, \forall n\in\mathbf{N}^*$.

a) Calculați I_2 și I_3.

b) Arătați că $I_n\neq 0$ dacă și numai dacă n este de forma $4k-1$ sau $4k$, $k\in\mathbf{N}^*$.

c) Fie $A_n=\{k\in\{1,2,...,n\} \mid I_n\neq 0\}$ și a_n numărul de elemente ale mulțimii A_n. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$.

* * *

Notă:

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu