OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 07.02.2020
CLASA a XI-a

Problema I. (7 puncte)

Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât urma matricei $Tr(A) = 1$. Să se arate că:

$$\det(A^2 + 5 \cdot A + 5 \cdot I_2) = \det(A^2 + A - 9 \cdot I_2) - 8.$$

prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național Emil Racoviță Cluj-Napoca

Problema II. (7 puncte)

a)Fie A și B două matrice pătratice de același ordin. Să se arate că:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) \cdot \det(A\text{-}B).$$

b) Să se calculeze $d = \begin{vmatrix} a & b & a+b & 0 & 0 & 0 \\ b & a+b & a & 0 & 0 & 0 \\ a+b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & a+b \\ 0 & 0 & 0 & b & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & a+b & a & b \end{vmatrix}.$

prof. Camelia Chindriș, Colegiul Național Andrei Mureșanu Dej

Problema III. (7 puncte)

Să se calculeze limita:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}(1 + tg^2 x + tg^2 2x + \cdots + tg^2 nx)\right)^{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{x^2}}$$

prof. Anca Cristina Hodorogea, ISJ Cluj

Problema IV. (7 puncte)

Se consideră şirul de numere reale cu termeni pozitivi

$$(a_n)_{n\geq 0}, a_0 = 1, a_1 = a, \quad a_{n+1}^5 = a_n^3 \cdot a_{n-1}^2, n \geq 1$$

Să se afle valoarea numărului real a pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 32$

prof. Jecan Eugen, Colegiul Național Andrei Mureșanu Dej

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!