Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a X – a

10

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1- Soluție orientativă:		**Punctaj**
a)	Din inegalitatea mediilor avem $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{2\sqrt{ab}},\forall a,b>0$.	**1p**
	$\frac{1}{a^x+b^{2x}}+\frac{1}{a^{2x}+b^x}+\frac{1}{(ab)^x+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(b\sqrt{a}\right)^x}+\frac{1}{\left(a\sqrt{b}\right)^x}+\frac{1}{\left(\sqrt{ab}\right)^x}\right)$ Cu egalitate dacă și numai dacă $x=0$.	**1p**
	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(b\sqrt{a}\right)^x}+\frac{1}{\left(a\sqrt{b}\right)^x}+\frac{1}{\left(\sqrt{ab}\right)^x}\right)\overset{(2)}{\le}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^x}+\frac{1}{b^x}+\frac{1}{(ab)^x}\right)$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=0$; inegalitatea (2) este adevătată din : $\alpha\beta+\beta\gamma+\lambda\alpha\le\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, unde $\alpha=\frac{1}{\left(\sqrt{a}\right)^x},\beta=\frac{1}{\left(\sqrt{b}\right)^x},\gamma=\frac{1}{\left(\sqrt{ab}\right)^x}$	**1p**
b)	Notăm $\log_2 x=a\Rightarrow x=2^a$ $\Rightarrow x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^2=1024^a+512^a+256^a+128^a+64^a+32^a+4^a$	**2p**
	Ecuația devine $1024^a+512^a+256^a+128^a+64^a+32^a+4^a=2020^a$ care împărțită la 2020^a conduce la funcția descrescătoare $f:R\to(0,\infty)$, $f(x)=\left(\frac{1024}{2020}\right)^x+\left(\frac{512}{2020}\right)^x+\left(\frac{256}{2020}\right)^x+\left(\frac{128}{2020}\right)^x+\left(\frac{64}{2020}\right)^x+\left(\frac{32}{2020}\right)^x+\left(\frac{4}{2020}\right)^x$.	**1p**
	Ecuația f(x)=1 are soluție unică a=1.	**1p**

Problema 2- Soluție orientativă:	**Punctaj**
$\{\log_2 y\}\in[0,1)$ și analoagele	**1p**
$2\log_2[x] = 2 - \{\log_2 y\}\in(1,2]$ și analoagele	**1p**
$[x]\in(\sqrt{2},2]$, $[x]=2$ și analoagele	**1p**
$\{\log_2 y\}=0$, $\log_2 y\in Z$,	**1p**
$y\ge 2$, $\log_2 y=n\in N$ și analoagele	**1p**
$y=2^n$, $[2^n]=2^n$ și analoagele	**1p**
n = 1, x = y = z = 2	**1p**

Problema 3- Soluție orientativă:	Punctaj
Notând $\frac{x}{y}=z$ avem $\frac{y}{x}=\frac{1}{z}$ şi relația din ipoteză $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$ se scrie $z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0$ $\Leftrightarrow z^3=-1, z\neq -1$.	2p
Notăm $E=\left(\frac{x}{y}\right)^{3n+1}+\left(\frac{y}{x}\right)^{3n+1}$ Rezultă: $E=\left(\frac{x}{y}\right)^{3n+1}+\left(\frac{y}{x}\right)^{3n+1}=z^{3n+1}+\left(\frac{1}{z}\right)^{3n+1}=z\cdot z^{3n}+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^{3n}=z\cdot\left(z^3\right)^n+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z^3}\right)^{3n}=$	3p
$=z\cdot(-1)^n+\frac{1}{z}(-1)^n=(-1)^n\left(z+\frac{1}{z}\right)=(-1)^n(1)=(-1)^n=\begin{cases}1, n=par\\ -1, n=impar\end{cases}$	2p

Problema 4- Soluție orientativă:	Punctaj
a) $\lvert z\rvert=1\Rightarrow z=\cos t+i\sin t$ şi dacă z=1 problema este evident adevărată. Pentru z≠1, $z_1=1+z+z^2+.....+z^{2020}=\frac{z^{2021}-1}{z-1}=\frac{\sin\frac{2021t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\left[\cos\frac{2020t}{2}+i\sin\frac{2020t}{2}\right]$, $\lvert z_1\rvert=\left\lvert\frac{\sin\frac{2021t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right\rvert$	3p
Notăm $x_{k+1}=\frac{\sin\frac{(2k+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$, $x_0=1$. Avem $x_{k+1}-x_k=2\cos(k+1)t\in Q$ pentru că $\operatorname{Re} z^{k+1}\in Q$. Prin inducţie completă i din $x_{n+1}=x_0+\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1}-x_k)\Rightarrow x_n\in Q, (\forall)n\geq 0$.	2p
b) $\bar{z}=z^{-1}\Rightarrow\lvert z^{2020}-1\rvert=\lvert\bar{z}\rvert^{2020}.\lvert z^{2020}-1\rvert=\lvert z^{1010}-\bar{z}^{1010}\rvert=2\lvert\sin 1010t\rvert\in Q$, pentru că $\operatorname{Im} z^{1010}\in Q$	2p

Notă:

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.
Se acordă numai punctaje întregi.