Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a XI – a

XI

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE şi NOTARE:

Problema 1- Soluție orientativă:		**Punctaj**
a)	$X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, a,b $\in \mathbb{R}$	**3p**
b)	Se demonstrează că XA= AX	**1p**
	$X^5=\begin{pmatrix} a^5 & 5a^4b \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$, a,b $\in \mathbb{R}$	**1p**
	Ecuația dată devine : a^5 + a= 34 și $5a^4$b=162 $\Longrightarrow$	**1p**
	a=2 (soluție unică pentru că funcția f(a)= a^5 + a este injectivă) $\Rightarrow$ b=2X= $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	**1p**

Problema 2- Soluție orientativă:	**Punctaj**
Se înmulțește prima relație cu 20, se adună cele două relații și se obține 31XY=2020(20X+Y) $\Longrightarrow$ 31 XY − 2020·20 X − 2020 Y = 0_n	**2p**
Se demonstrează următoarea lemă : Dacă aXY +bX+cY = 0_n , a,b,c $\neq$ 0, atunci XY=YX	**1p**
Demonstrație lemă : $XY+\frac{b}{a}X+\frac{c}{a}Y+\frac{bc}{a^2}I_n=\frac{bc}{a^2}I_n$ (1) $(X+\frac{c}{a}I_n)(Y+\frac{b}{a}I_n)=\frac{bc}{a^2}I_n$ (*) $\Longrightarrow \det(X+\frac{c}{a}I_n)\neq 0 \Longrightarrow \exists\left(X+\frac{c}{a}I_n\right)^{-1}=Z$ $(*)\Leftrightarrow Y+\frac{b}{a}I_n=\frac{bc}{a^2}Z \mid \cdot Z^{-1}$ $(Y+\frac{b}{a}I_n)(X+\frac{c}{a}I_n)=\frac{bc}{a^2}I_n$ $YX+\frac{b}{a}X+\frac{c}{a}Y+\frac{bc}{a^2}I_n=\frac{bc}{a^2}I_n$ (2) Din (1) și (2) $\Longrightarrow$ XY = YX	**3p**
Revenim la condițiile din ipoteză și obținem : 2020 X= 0_n $\Rightarrow$ X = 0_n 2020 Y = 0_n $\Rightarrow$ Y= 0_n	**1p**

Problema 3- Soluție orientativă:	**Punctaj**
Prin inducție se arată că $x_n = \dfrac{1}{2\cdot(a+1)^{n-1}-1}, n\geq 1$.	**1p**
Fie propoziția $P(n): x_n = \dfrac{1}{2\cdot(a+1)^{n-1}-1}, n\geq 1$. $P(1): x_1 = 1$, adevărat	**2p**
Presupunem că propoziția $P(k)$ este adevărată și arătăm că $P(k+1)$ este adevărată. Avem $x_k = \dfrac{1}{2\cdot(a+1)^{k-1}-1}$ și arătăm că $x_{k+1} = \dfrac{1}{2\cdot(a+1)^{k}-1}$. Calculăm $x_{k+1} = \dfrac{\frac{1}{2\cdot(a+1)^{k-1}-1}}{a\cdot\frac{1}{2\cdot(a+1)^{k-1}-1}+a+1} = \dfrac{1}{a+2a\cdot(a+1)^{k-1}-a+2\cdot(a+1)^{k-1}-1} =$ $= \dfrac{1}{2a\cdot(a+1)^{k-1}+2\cdot(a+1)^{k-1}-1} = \dfrac{1}{2(a+1)^{k-1}(a+1)-1} = \dfrac{1}{2\cdot(a+1)^{k}-1}$.	**2p**
Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(a+1)^n\cdot x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(a+1)^n\cdot\frac{1}{2\cdot(a+1)^{n-1}-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot(a+1)^{n-1}-1}{(a+1)^n} = \dfrac{2}{a+1}$.	**2p**

Problema 4- Soluție orientativă:		**Punctaj**
a)	a=1	**2p**
b)	$L = \lim\limits_{x\searrow 0}\left[\dfrac{arcsinx - arctgx}{\sin(arcsinx - arctgx} \cdot \dfrac{\sin(arcsinx - arctgx}{x^3}\right]$	**1p**
	$L = 1\cdot\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x\cos(arctgx)-\sqrt{1-x^2}\,\sin(arctgx)}{x^3}$	**1p**
	$L = \lim\limits_{x\searrow 0}\left(\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right)$	**2p**
	$L = \lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{2}$	**1p**

Notă:
Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.
Se acordă numai punctaje întregi.