

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 1 februarie 2020
Clasa a XII – a

XII

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1- Soluție orientativă:		Punctaj
a)	$(a \cdot b)^5 = a^5 \cdot b^5 \Rightarrow (b \cdot a)^4 = a^4 \cdot b^4$ Obținem $(ab)^4 = (ba)^4$ (1)	2p
	Analog, $(ab)^3 = (ba)^3$ (2)	1p
	Din relațiile (1) și (2) rezultă că $a \cdot b = b \cdot a$	1p
b)	Dacă H este subgrup, atunci $\forall x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$ Din $(xy)^2 = x^2 \cdot y^2$ rezultă că $x \cdot y = y \cdot x$	1p
	Reciproc, fie $x, y \in H$. Atunci $(xy)^2 = x^2 \cdot y^2 = e$ Iar $x^{-1} = x$ și $(x^{-1})^2 = x^2 = e$	2p

Problema 2- Soluție orientativă:		Punctaj
	Verificarea că este grup comutativ cu elementul neutru $e = 0$ și elementul simetric $x' = -x$	4p
	Considerarea funcției $f : (R, +) \rightarrow (R, *)$, $f(x) = x^n$	1p
	f este morfism	1p
	f este bijecție	1p

Problema 3- Soluție orientativă:		Punctaj
a)	$\frac{1}{x^4 + x^6} = \frac{1}{x^4(x^6 + 1)} = \frac{1}{x^4} - \frac{x^2}{x^6 + 1}$	1p
	$\int \frac{1}{x^4} dx = \frac{-1}{3x^3} + C$	1p
	$\int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{3} \arctg(x^3) + C$	1p
b)	Presupunem că admite primitiva F . Atunci $(x + F(e^{-x}))' \leq 0$	2p
	Funcția $g : R \rightarrow R$ este descrescătoare. Deci $g(0) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$. Contradicție	2p

Problema 4- Soluție orientativă:		Punctaj
Pentru $a \neq \frac{\pi}{4}$ avem	$\frac{1}{2tg^2 a} \left(\int \frac{1}{tg^2 x - tg^2 a} dx - \int \frac{1}{tg^2 x + tg^2 a} dx \right)$	1p
	$= \frac{1}{2tg^2 a} \left(\int \frac{1 + tg^2 x - tg^2 x + tg^2 a}{tg^2 x - tg^2 a} dx \cdot \frac{1}{1 + tg^2 a} - \int \frac{1 + tg^2 x - tg^2 x - tg^2 a}{tg^2 x + tg^2 a} dx \cdot \frac{1}{1 - tg^2 a} \right)$	1
	$= \frac{x}{1 - tg^4 a} + \frac{1}{4tg^3 a(1 + tg^2 a)} \cdot \ln \left(\frac{tga - tgx}{tga + tgx} \right) - \frac{1}{2tg^3 a(1 - tg^2 a)} \cdot \arctg \left(\frac{tgx}{tga} \right) + C$	2p
Pentru $a = \frac{\pi}{4}$ obținem	$\frac{1}{8} \ln \frac{1 - tgx}{1 + tgx} - \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{8} + C$	3p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Se acordă numai punctaje întregi.